ARTUR BĂLĂUCĂ
IOAN ŢICALO
MARIANA CIOBANAŞU
TOADER MĂGUREANU
IOAN CIOBANAŞU

MARIA ARITON
VERONICA BALMOŞ
STELA BOGHIAN
IONEL DOBRINCU
GRIGORE DUMITRU
GHEORGHE GÂNDU
MIHAI LUCIAN GLOAMBEŞ
NECULAI IVAN
ADRIANA MAXIMIUC
IONEL NECHIFOR
LENUŢA PÂRLOG
NICOLAE SANDA
MONICA SAS
STELIAN SFECLĂ
NICULAI SOLOMON
NICOLAE TĂLĂU
LAURENŢIU ŢIBREA

EVALUAREA NAŢIONALĂ 2011

MATEMATICĂ

116 TESTE DE RECAPITULARE ŞI APROFUNDARE

32 DE MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAŢIONALĂ 2011

CLASA a VIII-a

Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!

ARTUR BĂLĂUCĂ
IOAN ŢICALO
MARIANA CIOBANAŞU
TOADER MĂGUREANU
IOAN CIOBANAŞU

MARIA ARITON
VERONICA BALMOŞ
STELA BOGHIAN
IONEL DOBRINCU
GRIGORE DUMITRU
GHEORGHE GÂNDU
MIHAI LUCIAN GLOAMBEŞ
NECULAI IVAN
ADRIANA MAXIMIUC
IONEL NECHIFOR
LENUŢA PÂRLOG
NICOLAE SANDA
MONICA SAS
STELIAN SFECLĂ
NICULAI SOLOMON
NICOLAE TĂLĂU
LAURENŢIU ŢIBREA

EVALUAREA NAŢIONALĂ

MATEMATICĂ

CLASA a VIII-a

116 Teste de recapitulare şi aprofundare
32 de Modele de Teste pentru
Evaluarea Naţională 2011

Editura TAIDA
– Iaşi –

© Copyright Editura TAIDA. *Toate drepturile, aparţin Editurii TAIDA. Nicio parte a acestei cărţi nu poate fi retipărită, reprodusă sau utilizată în orice alt fel, inclusiv prin fotocopiere sau în formă electronică, fără avizul prealabil în scris al editurii.*

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

Evaluarea Naţională 2011. Matematică
/ Artur Bălăucă, Ioan Ţicalo, Toader Măgureanu,
Mariana Ciobanaşu, Ioan Ciobanaşu
206 p; 13,5 x 20 cm; Iaşi: Taida, 2011

Bibliogr.

ISBN 978-606-514-066-0

51(075.33)

Conştienţi că decizia cu privire la utilitatea lucrării aparţine în primul rând principalilor ei utilizatori – elevii şi profesorii lor – vom considera binevenite orice observaţii şi sugestii la:

BĂLĂUCĂ ARTUR
E-mail: arturbalauca@edituratаida.ro
Telefon: 0745.512535

Pentru comenzi vă rugăm să vă adresaţi EDITURII TAIDA

- **La adresa: Str. Vasile Lupu, nr. 70-74, Bl. P3, sc. 3, et. 3, ap. 12, Iaşi – 700309**
- **Telefonic: 0232.270250; 0232.270260; 0332.436194**
- **Mobil. 0748.234137; 0765.313632; 0722.824914**
- **Prin fax: 0232-270250; 0232.270260**
- **Prin email: office@edituratаida.ro**
- **Web: www.edituratаida.ro; www.mimio.ro**

www.edituratаida.ro **www.mimio.ro**

Introducere

Lucrarea de față vine în sprijinul elevilor care se pregătesc pentrtu **evaluarea națională** în vederea admiterii în liceu sau pentru recapitulări şi evaluări curente şi finale, fiind în conformitate cu programele şcolare actuale elaborate de **Ministerul Educației, Cercetării Tineretului şi Sportului** şi de **Consiliul Național de Evaluare şi Examinare.**

Evaluarea națională a elevilor din clasa a VIII-a începând cu acest an şcolar reprezintă un eveniment deosebit în viața unui adolescent. Dificultatea testului nu constă numai în natura subiectelor, ci mai ales în încărcătura psihică, cauzată de consecințele finalizării testării, punctajul obținut având o pondere însemnată în acceptarea la liceul dorit.

Autorii lucrării apreciază inițiativa Consiliului Național de Evaluare şi Examinare prin Evaluarea Națională – 2010 de a face primii paşi către evaluarea de tip PISA în direcția formării competențelor specifice studiului matematicii în gimnaziu prin formarea obişnuinței elevilor de a apela la concepte şi metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice. De aceea, autorii s-au străduit prin numeroase probleme propuse să răspundă la întrebarea care se pune tot mai frecvent: „La ce este utilă matematica?"

Structura cărții pe ani de studiu permite actualizarea şi fixarea într-un timp scurt şi în mod sistematic a cunoştințelor acumulate în clasele V–VIII.

De asemenea, lucrarea poate fi utilizată zilnic în pregătirea curentă a elevilor precum şi pentru evaluare sumativă începând cu clasa a V-a.

Primele 116 teste sunt grupate pe clase, şi cuprind probleme care asigură parcurgerea conținutului programei pentru evaluare națională elaborată de M.E.C.T.S., iar următoarele 32 de teste sunt modele asemănătoare cu cele pe care elevii le vor întâlni pe foaia de examen.

Parcurgerea gradată a conținutului programei actuale, oferă atât elevilor cât şi profesorilor care le îndrumă pregătirea, o eficientă recapitulare sistematică a noțiunilor studiate în cei patru ani de gimnaziu; exercițiile şi problemele sunt astfel grupate încât să asigure o pregătire gradată şi din punct de vedere al dificultății.

Testele din lucrare constituie totodată modele de subiecte şi pentru evaluări curente, semestriale sau finale pentru toate clasele din gimnaziu.

Exercițiile şi problemele din teste sunt însoțite de răspunsuri şi chiar rezolvări complete, astfel încât să poată fi utilizate în activitatea independentă a elevilor şi să permită autoevaluarea.

Suntem recunoscători şi adresăm mulțumirile noastre tuturor colaboratorilor pentru observațiile, sugestiile şi recomandările ce au contribuit la îmbunătățirea lucrării.

Artur Bălăucă

Cuprins

	Broviar	Enunțuri
EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI A VIII-A		
PROGRAMA PENTRU DISCIPLINA MATEMATICĂ, ANUL ȘCOLAR 2010-2011		6
CAPITOLUL I. RECAPITULARE ȘI APROFUNDARE		
CLASA A V-A. ARITMETICĂ		
Numere naturale. Mulțimi. Propoziții adevărate și propoziții false. Împărțirea cu rest a numerelor naturale. Divizibilitate în $\mathbb{N}$	9	9
Numere raționale pozitive. Fracții subunitare, echiunitare, supraunitare, echivalente. Scrierea unui număr rațional sub formă de fracție ordinară sau fracție zecimală		12
Unități de măsură. Transformări		14
CLASA A VI-A. ARITMETICĂ.ALGEBRĂ		
Numere naturale. Divizibilitatea în $\mathbb{N}$.	15	16
Numere raționale pozitive. Operații. Fracție ireductibilă	17	17
Rapoarte și proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor; proporții derivate; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție	18	19
Mărimi proporționale și mărimi invers proporționale		19
Regula de trei simplă		20
Procente. Probleme. Calculul propbabilității realizării unui eveniment	20	20
Mulțimea $\mathbb{Z}$. Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$	21	22
CLASA a VII-a. ALGEBRĂ		
Mulțimea numerelor raționale. Modul. Ordonare. Operații. Ecuații în $\mathbb{Q}$		25
Media aritmetică a unor numere raționale pozitive. Media geometrică a unor numere raționale pozitive	26	26
Numere reale	27	28
Calcule cu numere reale reprezentate prin litere		29
Formule de calcul prescurtat		30
Descompunerea în factori		31
Ecuații în $\mathbb{R}$		33
Probleme		34
CLASA A VIII-A. ALGEBRĂ		
Numere reale. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ Modulul unui număr real. Compararea și ordonarea numerelor reale. Aproximarea numerelor reale		35
intervale de numere reale		
Proprietățile relației de inegalitate (ordine) în $\mathbb{R}$	36	36
Operații cu numere reale		37
Formule de calcul prescurtat	38	38
Descompunerea în factori		39
Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere.		
Amplificarea și simplificarea rapoartelor		40
Operații cu rapoarte de numere reale		41
Funcții		44
Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$. Ecuații echivalente		45
Sisteme de ecuații	46	47
PROBLEME		48
Inecuații. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\geq$, $<$. $\leq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$. Probleme		49

GEOMETRIE

CLASA a VI-a

Măsurare şi măsuri 50 52
Punctul, dreapta, planul, semidreapta, segmentul de dreaptă, unghiul 52
Congruenţa triunghiurilor 53 53
Perpendicularitate. Cazurile de congruenţă pentru triunghiurile dreptunghice. Mediatoarea unui segment. Concurenţa mediatoarelor şi a bisectoarelor într-un triunghi..... 54 54
Drepte paralele. Suma unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi 55 55
Triunghiul isoscel. Triunghiul echilateral. Proprietăţi. Concurenţa înălţimilor şi a medianelor unui triunghi 57 57

CLASA a VII-a

Patrulaterul convex. Paralelogramul. Dreptunghiul.
Rombul. Pătratul 60 61
Trapezul 63 63
Teorema lui Thales şi reciproca ei 64 64
Linia mijlocie în triunghi. Linia mijlocie în trapez 65 65
Asemănarea triunghiurilor. Teorema fundamentală a asemănării. Criteriile de asemănare 66 66
Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic 68 68
Sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta. Rezolvarea triunghiului dreptunghic..... ..... 69 69
Aria triunghiului. Aria patrulaterului convex 71 71
Cercul 74 75
Lungimea cercului. Aria discului 76
Poligoane regulate 78 78

Clasa a VIII-a

Puncte. Drepte. Plane 79
Paralelism în spaţiu 80 81
Dreaptă perpendiculară pe un plan. Teorema celor trei perpendiculare (T.3⊥.). Distanţa de la un punct la o dreaptă..... 83 83
Proiecţii ortogonale pe un plan. Oblice. Distanţa de la un punct la un plan. Unghiul unei drepte cu un plan 85 85
Unghi diedru. Plane perpendiculare 86 86
Paralelipipedul dreptunghic. Prisma dreaptă cu baza un pătrat (patrulateră regulată) 88 88
Cubul 90 90
Prisma triunghiulară regulată 91 91
Piramida patrulateră regulată 92 92
Piramida triunghiulară regulată 93 93
Tetraedrul regulat 94

CAPITOLUL II

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAŢIONALĂ 96

RĂSPUNSURI, INDICAŢII, SOLUŢII, COMENTARII 147

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI A VIII-A
PROGRAMA PENTRU DISCIPLINA MATEMATICĂ
ANUL ȘCOLAR 2010-2011

I. STATUTUL DISCIPLINEI

Pentru anul școlar 2010/2011, în cadrul Evaluării Naționale pentru elevii clasei a VIII-a, **matematica** are statut de **disciplină obligatorie**.
Testul la matematică **este o probă scrisă cu durata de 2 ore**.

II. COMPETENȚE DE EVALUAT

1. Utilizarea noțiunii de număr real și a relațiilor dintre mulțimile de numere studiate
2. Identificarea proprietăților operațiilor cu numere reale
3. Aplicarea operațiilor cu numere reale în calcule variate
4. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, procentelor, proporțiilor
5. Identificarea unor probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, inecuațiilor sau a sistemelor de ecuații, rezolvarea acestora și interpretarea rezultatului obținut
6. Aplicarea în rezolvarea problemelor a elementelor de logică și de teoria mulțimilor
7. Utilizarea elementelor de calcul algebric
8. Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin dependențe funcționale sau calculul probabilităților
9. Aplicarea teoriei specifice funcției de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
10. Utilizarea proprietăților figurilor geometrice și a corpurilor geometrice în probleme de demonstrație și de calcul
11. Reprezentarea, prin desen, a unor figuri geometrice și a unor corpuri geometrice utilizând instrumente geometrice
12. Transpunerea în limbaj matematic a enunțului unei situații-problemă
13. Analizarea și interpretarea rezultatelor obținute prin rezolvarea unor probleme practice cu referire la figurile geometrice și la unitățile de măsură.
14. Investigarea valorii de adevăr a unor enunțuri si construirea unor generalizări
15. Redactarea coerentă și completă a soluției unei probleme

III. CONȚINUTURI

ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

Mulțimi

Mulțimi: relații (apartenență, egalitate, incluziune); submulțime; operații cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența, produsul cartezian). Mulțimi finite, mulțimi infinite.
Mulțimile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.
Scrierea numerelor naturale în baza zece.
Propoziții adevărate și propoziții false.
Împărțirea cu rest a numerelor naturale. Divizibilitatea în $\mathbb{N}$: definiție, divizor, multiplu; proprietăți ale relației de divizibilitate; criteriile de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3; numere prime și numere compuse; numere parc și numere impare; numere prime între ele; descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime; cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun.
Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$: definiție, divizor, multiplu.
Fracții subunitare, echiunitare, supraunitare; reprezentări echivalente ale fracțiilor; fracții ireductibile.
Scrierea unui număr rațional sub formă de fracție ordinară sau fracție zecimală.
Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea și ordonarea numerelor reale.
Valoarea absolută (modulul), partea întreagă și partea tracționară a unui număr real. Opusul și inversul unui număr real. Rotunjirea și aproximarea unui număr real.
Intervale în $\mathbb{R}$: definiție, reprezentare pe axă.
Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect; algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural; scrierea unui număr real pozitiv ca radical din pătratul său.

Reguli de calcul cu radicali. Introducerea factorilor sub radical. Scoaterea factorilor de sub radical.
Raţionalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}, a\pm\sqrt{b}$ cu $a\in\mathbb{Z}^*, b\in\mathbb{N}$. Operaţii cu numere reale: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere cu exponent număr întreg. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor. Factorul comun.
Media aritmetică a unor numere raţionale pozitive. Media geometrică a două numere reale pozitive.
Rapoarte şi proporţii: raport, proprietatea fundamentală a proporţiilor; proporţii derivate; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie; mărimi direct proporţionale şi mărimi invers proporţionale; regula de trei simplă. Procente: p% dintr-un număr real; aflarea unui număr raţional când cunoaştem p% din el; aflarea raportului procentual. Rezolvarea problemelor în care intervin procente.
Calculul probabilităţii de realizare a unui eveniment.

Calcul algebric
Calcul cu numere reprezentate prin litere: adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicarea la putere cu exponent număr întreg.
Formulele de calcul prescurtat: $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
Descompunerea în factori: metoda factorului comun; utilizarea formulelor de calcul prescurtat; gruparea termenilor şi metode combinate.
Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Simplificare. Operaţii cu rapoarte (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere cu exponent număr întreg).

Funcţii
Noţiunea de funcţie.
Funcţii definite pe mulţimi finite exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule; graficul unei funcţii, reprezentarea geometrică a graficului.
Funcţii de tipul $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a,b\in\mathbb{R}$, unde $A-\mathbb{R}$ sau o mulţime finită; reprezentarea geometrică a graficului funcţiei f; interpretare geometrică.

Ecuaţii, iuccuaţii şi sisteme de ecuaţii
Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuaţiilor de forma $ax + b = 0$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$. Ecuaţii echivalente.
Rezolvarea în $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$ a sistemelor de ecuaţii de forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}, a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a inecuaţiilor de forma $ax + b \le 0$ ($<, \ge, >$), $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$.
Probleme cu caracter aplicativ care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, inecuaţiilor şi al sistemelor de ecuaţii.
Utilizarea metodelor aritmetică sau algebrică pentru rezolvarea unor probleme.

GEOMETRIE

Măsurare si măsuri

Figuri şi corpuri geometrice:

1. Punctul, dreapta, planul, semiplannl, semidreapta, segmentul de dreaptă, unghiul
– poziţii relative, clasificare; convenţii de desen şi de notaţii
– paralelism si perpendicularitate în plan şi în spaţiu; axioma paralelelor; unghiuri cu laturile respectiv paralele; unghiul a două drepte în spaţiu; drepte perpendiculare; dreapta perpendiculară pe un plan; distanţa de la un punct la un plan; plane paralele; distanţa dintre două plane paralele;
– teorema celor trei perpendiculare; distanţa de la un punct la o dreaptă;
– proiecţia ortogonală a unui punct, segment sau a unei drepte pe un plan;
– unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecţiei unui segment;

– unghiul diedru; unghiul plan corespunzător unui unghi diedru; măsura unghiului a două plane; plane perpendiculare;
– simetria față de un punct în plan; simetria față de o dreaptă în plan,
– calculul unor distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate.

2. Triunghiul
– perimetrul și aria;
– suma măsurilor unghiurilor unui triunghi;
– unghi exterior unui triunghi;
– linii importante în triunghi și concurența lor;
– linia mijlocie în triunghi;
– triunghiul isoscel și triunghiul echilateral - proprietăți;
– criteriile de congruență a triunghiurilor;
– triunghiul dreptunghic - teorema înălțimii; teorema catetei; teorema lui Pitagora și reciproca ei;
– sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta; rezolvarea triunghiului dreptunghic;
– teorema lui Thales și reciproca ei;
– teorema fundamentală a asemănării;
– triunghiuri asemenea - criteriile de asemănare a triunghiurilor,

3. Patrulaterul convex
– perimetrul și aria (paralelogramul, dreptunghiul, rombul, pătratul, trapezul);
– suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex;
– paralelogramul - proprietăți referitoare la laturi, unghiuri, diagonale;
– paralelograme particulare (dreptunghi, romb, pătrat) - proprietăți;
– trapezul; linia mijlocie în trapez;
– trapeze particulare (isoscel și dreptunghic) - proprietăți.

4. Cercul
– centru, rază, diametru, disc;
– unghi la centru;
– coarde și arce în cerc (la arce congruente corespund coarde congruente și reciproc; proprietatea diametrului perpendicular pe o coardă; proprietatea arcelor cuprinse între două coarde paralele; proprietatea coardelor egal depărtate de centru);
– unghi înscris în cerc; măsura unghiului înscris în cerc;
– lungimea cercului; aria discului;
– calculul elementelor (latură, apotemă, perimetru, aric) în poligoane regulate: triunghi echilateral, pătrat.

5. Corpuri geometrice
Paralelipipedul dreptunghic, cubul; prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral, pătrat sau dreptunghi; piramida triunghiulară regulată, tetraedrul regulat, piramida patrulateră regulată:
– reprezentarea lor prin desen; convenții de desen și de notații;
– descrierea elementelor lor (vârfuri, muchii, fețe laterale, baze, diagonale, înălțimi);
– desfășurări;
– aria laterală, arta totală, volumul.

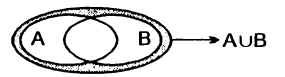
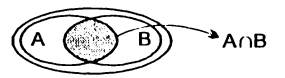
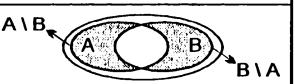
NOTĂ: *Programa pentru evaluarea națională 2011 la disciplina matematică este realizată în conformitate cu prevederile programelor școlare în vigoare. Subiectele pentru evaluarea națională din anul 2011 pentru elevii clasei a VIII-a se elaborează în baza prevederilor prezentei programe.*

CAPITOLUL I. RECAPITULARE ŞI APROFUNDARE
A R I T M E T I C Ă

CLASA a V-a

Numere naturale. Mulţimi. Propoziţii adevărate şi propoziţii false. Împărţirea cu rest a numerelor naturale. Divizibilitatea în N

Reţineţi!

Operaţia	Notaţia	Definiţia	Diagrama
Reuniunea	$A \cup B$	$\{x/x \in A$ sau $x \in B\}$	
Intersecţia	$A \cap B$	$\{x/x \in A$ şi $x \in B\}$	
Diferenţa	$A \setminus B$	$\{x/x \in A$ şi $x \notin B\}$	
Produs cartezian	$A \times B$ $A \times B \times C$	$\{(x,y)/x \in A$ şi $y \in B\}$ $\{(x,y,z)/x \in A, y \in B, z \in C\}$	

Test 1

1. Calculaţi:

a) $255:(65-50)-(80:4-256\cdot 0):2$; **b)** $89+89:89-89$;

c) $30+5\cdot\{32:8+5\cdot[40+8\cdot(200:5-72:2)]\}$.

2. Verificaţi că: $23^2-15^2=(23-15)(23+15)$; $45^2-12^2=(45-12)\cdot(45+12)$;

$(11+7)^2=11^2+2\cdot 7\cdot 11+7^2$; $(13-5)^2=13^2-2\cdot 5\cdot 13+5^2$;

$(4+5+6)^2=4^2+5^2+6^2+2\cdot 4\cdot 5+2\cdot 5\cdot 6+2\cdot 4\cdot 6$.

3. Să se afle x din egalitatea: $\{[(7x+34):17+18]:5-12\}:8=960:160$.

4. Calculaţi: **a)** $(64-1^2)\cdot(64-2^2)\cdot\ldots\cdot(64-8^2)$;

b) $385\cdot 47-385\cdot 5+385\cdot 58$; **c)** $3^4\cdot 52+16\cdot 3^5-11\cdot 3^6$;

d) $ab+ac-bc$ ştiind că $a+b=17$, $a+c=18$, $b+c=19$.

5. Să se afle numerele de forma $\overline{xyz}$ în baza 10, ştiind că:

$\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{zx}=121$ şi $x<y<z$.

Test 2

1. Calculați: **a)** $(8+16+24+32+...+1000):(1+2+...+125)$;

b) $(8+80+800+8000+800000):(1+10+100+1000+100000)$;

c) $1+3+5+7+...+1999-2-4-6-...-1998$.

2. Calculați: **a)** $7^{45}:(7^2\cdot 7^{41})\cdot(5^2+3\cdot 5):35$; **b)** $10\cdot\{21^3:441-3\cdot$

$\cdot[(3^3\cdot 3\cdot 3^2\cdot 5^3)^{10}:(3^{60}\cdot 5^{30})-1^{100}]\}$; **c)** $\left(2^3\right)^5\cdot 4^6:\left(2^9\right)^1$.

3. Determinați numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$ știind că: $2\cdot\overline{ab}+3\cdot\overline{ba}=147$ și $a\neq 0, b\neq 0$.

4. Aflați numerele naturale a și b știind că $(a-1)(b-3)=12$ și suma $a+b$ este maximă.

5. Mai mulți copii vor să cumpere un obiect. Dacă fiecare dă câte 400 lei, nu ajung 2000 lei, iar dacă fiecare dă câte 500 lei, prisosesc 500 lei. Câți copii sunt și cât costă obiectul?

6. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 8 dau câtul egal cu 10.

Test 3

1. Calculați: $\{[(2\cdot 27-2\cdot 7)+2\cdot 12]:4+9\}\cdot(1+3\cdot 3)-[(3+3^3)+(2^2+2^4)]$.

2. Aflați x din: **a)** $[(x+2^2):2^3-3^7:3^6]\cdot 2^7=2^8-2^7$; **b)** $3^{x-5}=\left(3^9\right)^4:9^{10}$.

3. Diferența a două numere naturale este 1997 și împărțind numărul mare la numărul mic obținem câtul 3 și restul 7. Aflați numerele.

4. Fie numărul $a=111^{111}+222^{222}+333^{333}+444^{444}+555^{555}-666^{666}$. Arătați că a nu este pătrat perfect.

5. Un automobil a parcurs distanța dintre două orașe în 6 ore. Dacă viteza automobilului ar fi fost cu 12 km pe oră mai mare, atunci ar fi parcurs aceeași distanță în 5 ore. Aflați viteza automobilului.

6. Determinați mulțimile: $A=\left\{n\in\mathbb{N}/n=\overline{15x},\ 2/n\right\}$; $B=\left\{m\in\mathbb{N}/m=\right.$

$\left.=\overline{4xy},\ 5/m\right\}$; $C=\left\{p\in\mathbb{N}/p=\overline{17x},10/p\right\}$; $D=\left\{q\in\mathbb{N}/q=\overline{x7x},2/q\right\}$.

Test 4

1. Negați propozițiile următoare: **a)** $9 = 3^2$; **b)** $10 \neq 8$; **c)** $8 \leq 3 + 10$ **d)** $500 > 1453$; **e)** $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 2^8 - 2$ și apoi precizați valoarea logică a fiecăreia.

2. Câte numere naturale de trei cifre împărțite la 42 dau restul 10?

3. Arătați că numărul $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 16 + 1997$ nu este pătrat perfect.

4. Într-o împărțire, câtul este 70, împărțitorul este 80, iar restul 60. Să se calculeze suma dintre deîmpărțit, împărțitor, cât și rest.

5. Suma unor numere naturale consecutive este 25. Aflați numerele.

6. Se știe că $ab + ac + ad = 450$ și $b + c + d = 15$. Aflați a.

Test 5

1. Diferența a două numere naturale este egală cu 1858. La împărțirea lor se obține câtul 42 și restul 13. Să se afle numerele.

2. Care dintre următoarele numere este pătrat perfect: 3^4; 3^9; $3^5 + 3^4$; $3^n + 24 \cdot 3^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$); $3^6 + 33 \cdot 3^7$; $5^{11} + 3 \cdot 5^{10} - (2 \cdot 5^4)^2$?

3. Să se determine pătratele perfecte de forma $\overline{ab}$ care sunt și cuburi perfecte.

4. Determinați numărul natural n care verifică fiecare egalitate:

a) $n^2 = 49$; **b)** $n^3 = 125$; **c)** $4^n = 1$; **d)** $5^n = 125$; **e)** $n^2 - 6^2 = 8^2$; **f)** $5^n + 5^{n-1} + 5^{n-2} = 155$; **g)** $3^{n+1} = 81$; **h)** $3^n > 2^n$; **i)** $n^3 - 6^3 = 8^3 + 1^3$.

5. Scrieți submulțimile mulțimii: $A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 7 \leq n \leq 3^2\}$.

6. Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 15x < 60\}$; $B = \{y \in \mathbb{N}^* \,/\, 4y \leq 20\}$; $C = \{z \in \mathbb{N} \,/\, z^2 - 1 \leq 26\}$. Aflați: **a)** $A \cup B \cup C$; **b)** $B \cap C$; **c)** $C \setminus A$; **d)** $B \setminus C$.

Test 6[*]

I.1. Efectuând calculele: $265 : (70 - 65) - (30 : 2 - 133 \cdot 0)$ obținem: **a)** 0; **b)** 38; **c)** 28; **d)** 7.

2. Calculând produsul: $(225 - 1^2)(225 - 2^2) \ldots (225 - 16^2)$, obținem: **a)** 0; **b)** 225^2; **c)** 10; **d)** nu se poate calcula în $\mathbb{N}$.

3. Calculând suma: $3 + 6 + 9 + \ldots + 2001$ se obține rezultatul: **a)** 2004; **b)** 668334; **c)** 668332; **d)** 568334.

[*] La fiecare din problemele 1 - 9 numai un răspuns este corect.

4. Valoarea lui $x \in \mathbb{N}$ din: $2[(x+3)^2 - 5^2]: 11 + 2003^0 = 3$ este:
a) 0; **b)** 2; **c)** 1; **d)** 3.

5. Dintre numerele 5^4; 5^9; $5^5 + 5^4$ şi $5^n + 20 \cdot 5^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), pătrat perfect este numărul: **a)** 5^4; **b)** 5^9; **c)** $5^5 + 5^4$; **d)** $5^n + 20 \cdot 5^{n+1}$.

6. Numărul natural n, care verifică egalitatea: $n^3 = 512$, este: **a)** 2; **b)** 7; **c)** 8; **d)** 9.

7. Numărul $\overline{ab}$, cub perfect mai mare ca 30 este: **a)** 64; **b)** 27; **c)** 81; **d)** 125.

8. Dacă suma unor numere naturale consecutive este 25, atunci cel mai mare dintre numere este: **a)** 7; **b)** 24; **c)** 15; **d)** 13.

9. Numărul $\overline{ab}$ din egalitatea: $5 \cdot \overline{ab} - 4 \cdot \overline{ba} = 9$ este: **a)** 45; **b)** 54; **c)** 31; **d)** 46.

II. 10. Diferenţa a două numere naturale este 4444. La împărţirea lor obţinem câtul 99 şi restul 34. Aflaţi numerele.

11. Se dau mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{N} / x^3 < 100\}$; $B = \{y \in \mathbb{N}^* / 5y \leqslant 34\}$ şi $C = \{z \in \mathbb{N} / z^2 - 3 \leqslant 30\}$. Calculaţi: **a)** $A \cup B \cup C$; **b)** $A \cap C$; **c)** $A \setminus B$; **d)** $B \setminus C$.

12. Fiecare din cei 175 de elevi din clasa a V–a ai unei şcoli învaţă cel puţin una din limbile franceză şi engleză. Dintre aceştia 92 învaţă limba franceză şi 130 învaţă limba engleză.
a) Câţi elevi învaţă ambele limbi?
b) Câţi elevi învaţă numai limba franceză?
c) Câţi elevi învaţă numai limba engleză?

Numere raţionale pozitive. Fracţii subunitare, echiunitare, supraunitare, echivalente. Scrierea unui număr raţional sub formă de fracţie ordinară sau fracţie zecimală

Test 7

1. Reprezentaţi pe axa numerelor fracţiile: $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$.

2. Scrieţi cinci fracţii ordinare echivalente cu fracţia $\frac{5}{6}$.

3. Scrieţi fracţiile echivalente cu fracţia $\frac{7}{11}$ care au numitorul un număr natural cuprins între 60 şi 100.

4. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât fiecare număr raţional să fie număr natural: **a)** $\frac{32}{n^2}$; **b)** $\frac{128}{n^3}$; **c)** $\frac{8}{n-1}$, $n \neq 1$; **d)** $\frac{50}{n^2+1}$; **e)** $\frac{n-1}{n+1}$.

5. Ordonaţi crescător fracţiile: **a)** $\frac{3}{10}; \frac{6}{14}; \frac{15}{55}; \frac{3}{43}; \frac{3}{8}; \frac{30}{50}$; **b)** $\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{7}{10}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; \frac{5}{2}; \frac{16}{20}; \frac{30}{4}$; **c)** $\frac{2}{3}; \frac{5}{18}; \frac{3}{9}; \frac{23}{36}; \frac{5}{6}; \frac{44}{72}; \frac{54}{108}; \frac{75}{180}$.

6. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care sunt adevărate relaţiile: **a)** $\frac{n}{3} < \frac{25}{n^2}$; **b)** $\frac{2n+1}{15} > \frac{3}{7}$ şi $n < 8$; **c)** $2 < \frac{3n+4}{2n} < 3$.

Test 8

1. **a)** Ordonaţi crescător fracţiile zecimale: 3,45; 3, 045; 3,461; 3, 501; 2, 99; 4,07; 3,007. **b)** Scrieţi trei fracţii zecimale cu patru zecimale care sunt cuprinse între numerele 7,321 şi 7,322.

2. Calculaţi: **a)** $1{,}352 + 0{,}4 \cdot 1{,}5$; **b)** $5{,}012 - 1{,}01 \cdot 2{,}03$; **c)** $0{,}3145 \cdot 10^4$; **d)** $162{,}02 : 0{,}04$; **e)** $203{,}012 : 10^5$; **f)** $2{,}95428 : 21{,}102$; **g)** $301{,}12 \cdot 10^5$.

3. Media aritmetică a două numere raţionale este 312,45. Aflaţi numerele ştiind că primul număr este cu 22,5 mai mare decât al doilea.

4. Un bazin de înot are lungimea de 15 m şi lăţimea de 8 m. Din cauza evaporării, nivelul apei a scăzut cu 12 cm. Câţi hectolitri de apă s-au evaporat?

5. Arătaţi că din 370 de elevi cel puţin doi elevi s-au născut în aceeaşi zi a anului.

6. Fie numărul $\frac{7}{9}$. Scrieţi alte şase fracţii care-l reprezintă (echivalente).

Test 9

1. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţiile: **a)** $2x + 7 = 37$; **b)** $5x - 3 = 52$; **c)** $4x : 9 = 16$; **d)** $33 : x = 11$; **e)** $8x - 5 = 2x + 7$; **f)** $9x - 2 = 3x + 11$.

2. Mama este cu 30 ani mai mare decât fiica sa, iar peste 5 ani va avea de patru ori vârsta fiicei. Câţi ani are fiecare?

3. Calculaţi: **a)** $1999 + 1999 \cdot 2000 - 2001 \cdot 1998$; **b)** $\left(4^2 + 3^2 + 5^2\right) : \left(7^2 + 6^0\right) + 1^8$; **c)** $\left(0{,}12 \cdot 0{,}3 + 6{,}25 : 0{,}025\right) \cdot 1{,}5 - 3{,}142$.

4. Aflați mulțimile A și B ale căror elemente sunt numere naturale nenule știind că verifică simultan condițiile: **a)** $A \cap B = \{3, 5, 6\}$; **b)** $B \setminus A = \{8\}$; **c)** suma elementelor mulțimii $A \cup B$ este egală cu 33.

5. Suma dimensiunilor unui dreptunghi este 6,5 dam și diferența lor este 15 m. Aflați perimetrul și aria dreptunghiului.

6. Un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 12 m, 8 m și 3,5 m se umple cu apă 60% din capacitatea sa. **a)** Care este înălțimea apei din bazin ? **b)** Câți hectolitri de apă sunt în bazin ?

Unități de măsură. Transformări

Test 10

1. Transformați: **a)** 2m = ... km; **b)** 0,002 km = ... dm; **c)** 4000 mm = ... dam; **d)** $0,3 \cdot 10^4$ mm = ... m.

2. Transformați: **a)** 2,4 kg = ... g; **b)** 4700 g = ... kg; **c)** 0,0025 t = ... dag; **d)** 20000 mg = ... kg.

3. Transformați: **a)** 2 m^2 = ... cm^2; **b)** 0,02 km^2 = ... ha; **c)** 400 dm^2 = ... ari; **d)** 0,25 ha = ... dm^2.

4. Transformați: **a)** 3 m^3 = ... cm^3; **b)** $3 \cdot 10^{-6}$ km^3 = ...dm^3; **c)** 4000000 mm^3 = ... dam^3; **d)** 2500 dm^3 = ... m^3.

5. Transformați: **a)** 7 *l* = ... cl; **b)** 0,0017 kl = ... dl; **c)** 400 ml = ... *l*; **d)** 1,8 dal = ... dl.

6. Transformați: **a)** 1 m^3 = ... *l*; **b)** 1700 m^3 = ...hl; **c)** 4000 cm^3 = ...*l*; **d)** 4,5 *l* = ...m^3; **e)** 17,82 dl = ...cm^3; **f)** 14,14 dal=..... dam^3; **g)** 205,5 cl = ... m^3; **h)** 315 *l* = ... dam^3.

7. Câți litri de apă încap într-o piscină ce are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 10 m, 16 m și 210 cm ?

8. Care este capacitatea (în litri) a unui rezervor de forma unui cub cu lungimea muchiei de 75 cm ?

9. Câte kilograme de vopsea sunt necesare pentru a vopsi un gard înalt de 1,80 m și lung de 40 m, știind că pentru fiecare centimetru pătrat sunt necesare 0,02 g vopsea ?

10. Într-o canistră de forma unui paralelipiped dreptunghic încap 26,6 *l* benzină. Care este înălțimea canistrei știind că lungimea este de 2 dm și lățimea de 19 cm ?

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

CLASA a VI-a

Numere naturale. Divizibilitatea în $\mathbb{N}$.

Reţineţi!

➲ Un număr natural b **divide** un număr natural a dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Observaţie. Nu există pentru orice pereche de numere naturale a şi b un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$ şi, urmează că relaţia b/a **nu este peste tot definită în** $\mathbb{N}$.

Pentru $a \in \mathbb{N}$ se consideră mulţimea $D_a = \{x \in \mathbb{N} / x/a\}$ ale cărei elemente se numesc divizorii lui a. D_a este mulţime finită.

PROPRIETĂŢI:

1. a/a, oricare $a \in \mathbb{N}$ **(reflexivitatea)**;
2. a/b şi $b/a \Rightarrow a = b$ **(antisimetria)**;
3. a/b şi $b/c \Rightarrow a/c$ **(tranzitivitatea)**;
4. $1/a$, oricare $a \in \mathbb{N}$;
5. $a/1 \Rightarrow a = 1$;
6. $a/0$, oricare $a \in \mathbb{N}$;
7. $0/a \Rightarrow a = 0$;
8. $a/b \Rightarrow a/b \cdot c$, oricare $c \in \mathbb{N}$;
9. a/b_1 şi $a/b_2 \Rightarrow a/b_1 + b_2$ şi $a/b_1 - b_2$ $(b_1 \geq b_2)$;
10. a/b şi $a \nmid c \Rightarrow a \nmid b+c$;
11. a/b_1 şi $a/b_2 \Rightarrow a/b_1c_1 + b_2c_2$, oricare $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$;
Generalizare:
$a/b_1, a/b_2, \ldots, a/b_n \Rightarrow a/b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n$, oricare $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$;
12. $a/b \Rightarrow ac/bc$, oricare $c \in \mathbb{N}$;
13. ac/bc şi $c \neq 0 \Rightarrow a/b$;
14. a_1/b_1 şi $a_2/b_2 \Rightarrow a_1a_2/b_1b_2$. Generalizare: $a_1/b_1, a_2/b_2, \ldots, a_n/b_n \Rightarrow a_1a_2\ldots a_n / b_1b_2\ldots b_n$.

➲ **Cel mai mare divizor comun** (c.m.m.d.c) al numerelor naturale a şi b este un număr natural d, notat (a,b) care satisface condiţiile: **1.** d/a şi d/b; **2.** oricare $d' \in \mathbb{N}$ cu d'/a şi $d'/b \Rightarrow d'/d$.

➲ Numerele naturale a şi b se numesc **prime între ele** dacă $(a,b) = 1$.

➲ Dacă a/c, b/c şi $(a,b) = 1$, atunci ab/c.
Fie numerele naturale a şi b. Dacă $(a, b) = 1$, atunci există numerele naturale m şi n prime între ele astfel încât $a = dm$ şi $b = dn$.

➲ **Cel mai mic multiplu comun** (c.m.m.m.c.) al numerelor naturale a şi b este un număr natural m, notat $[a, b]$, care îndeplineşte condiţiile: **1.** a/m şi b/m; **2.** oricare ar fi $m' \in \mathbb{N}$ cu a/m' şi $b/m' \Rightarrow m/m'$.

➲ $a \cdot b = [a,b] \cdot (a,b)$.

➲ Un număr natural a se numeşte **prim** dacă mulţimea divizorilor săi are cardinalul 2.

➲ Un număr natural a se numeşte **compus** dacă mulţimea divizorilor săi are cardinalul cel puţin 3.

Test 11

1. **a)** Determinați cel mai mic număr natural știind că împărțit pe rând la 9, 12 și 18 dă restul 8 de fiecare dată. **b)** Numerele 122, 149, 176 împărțite la același număr natural dau resturile respectiv 10, 9 și 8. Aflați împărțitorul.

2. Determinați numerele naturale în baza 10 de forma $\overline{14ab}$ divizibile cu: **a)** 2 și 5; **b)** 3 și 5; **c)** 2 și 3; **d)** 5 și 7.

3. Să se arate că dacă n / 12, atunci $n + 2$ / 840.

4. Să se determine numerele naturale prime de forma $\overline{abc}$ știind că $a \cdot b \cdot c = 252$.

5. Să se afle numerele naturale a, b, c știind că: $ab = 48$; $ac = 60$ și $bc = 80$.

6. Aflați numerele naturale x și y știind că: **a)** $(x+1)(y+3) = 56$;
b) $(x+4)(y+6) = 48$.

7. Arătați că numărul $N = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{1999}$ este divizibil cu : **a)** 4; **b)** 10; **c)** 11; **d)** 121.

Test 12

1. Aflați valoarea logică a afirmației: „Pentru orice număr natural n, numărul $n(n+3)+13$ este număr prim".

2. Aflați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al numerelor: **a)** 120; 360; 540; 480; **b)** 3400; 5780; 1190; **c)** 130; 650; 910; 2600; **d)** 200; 600; 900; 1800; 3600.

3. Numerele 425 și 367 împărțite la același număr natural dau resturile 5 și respectiv 7. Aflați împărțitorul.

4. Arătați că: **a)** $9^{20} - 7^{20}$ este divizibil cu 10; **b)** $A = 5^{2n} \cdot 7^{2n+1} \cdot 11^{2n} + 25^n \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n+1} - 5^{2n+1} \cdot 49^n \cdot 121^n$ se divide cu 5005 dacă $n \in \mathbb{N}^*$;
c) $1000^{1997} + 1997$ și $2^n \cdot 5^n + 2$ sunt divizibile cu 3, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

5. Determinați toate numerele naturale a și b știind că: **a)** $(a,b) = 14$ și $a \cdot b = 1176$; **b)** $a + b = 126$ și $(a,b) = 18$; **c)** $(a,b) = 15$ și $4a + 5b = 315$.

6. **a)** Determinați mulțimea: $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{cb}\}$. **b)** Arătați că nu există nici un număr natural care împărțit la 15 dă restul 11 și împărțit la 10 dă restul 8.

Numere raționale pozitive. Operații. Fracție ireductibilă

Rețineți! $\overline{a,(b)} = a\frac{b}{9}$; $\overline{a,(bc)} = a\frac{\overline{bc}}{99}$; $\overline{a,(bcd)} = a\frac{\overline{bcd}}{999}$; $\overline{a,b(c)} = a\frac{\overline{bc}-b}{90}$;

$\overline{a,b(cd)} = a\frac{\overline{bcd}-b}{990}$; $\overline{a,bc(def)} = a\frac{\overline{bcdef}-\overline{bc}}{99900}$.

Test 13

1. Câte numere naturale există printre numerele: $\frac{1\cdot 15}{40}, \frac{2\cdot 15}{40}, ..., \frac{50\cdot 15}{40}$?

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ în baza 10, știind că:

a) fracția $\frac{17}{a^2+b^2}$ este echiunitară; **b)** fracția $\frac{3}{a+b}$ este supraunitară;

c) racția $\frac{a+b}{4}$ este subunitară.

3. Determinați m, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât: **a)** $\frac{4n}{7} \le \frac{14}{15}$; **b)** $\frac{2}{5} \le \frac{4}{m} < \frac{7}{8}$.

4. Ordonați crescător fracțiile: $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{7}{24}, \frac{19}{24}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{1}{2}, \frac{9}{12}, \frac{11}{24}, \frac{5}{8}, \frac{7}{9}$.

5. Arătați că fracția $\frac{6n+7}{10n+11}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Test 14

1. Calculați: **a)** $\frac{1}{3}+\frac{7}{12}+\frac{3}{4}$; **b)** $\frac{1}{4}+\frac{11}{16}-\frac{3}{8}$; **c)** $4-\frac{5}{6}-\frac{7}{15}$;

d) $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{40}:\frac{4}{11}$; **e)** $1\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}:4\frac{1}{3}$; **f)** $\left(2\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{45}{74}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right)$.

2. Efectuați: **a)** $\frac{5}{7}\cdot\frac{49}{75}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{25}-\frac{4}{11}\cdot\frac{33}{50}$; **b)** $\frac{11}{37}\cdot\left[\left(2\frac{1}{2}+1\frac{1}{5}\right):2\frac{1}{5}\right]+\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{6}:\frac{25}{24}\right)\cdot 5$;

c) $\left[\left(2\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{2}{3}\right]:\left[\left(5\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\right):1\frac{7}{12}+2\right]$; **d)** $\frac{1111}{7000}:$

$:\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{70}+\frac{1}{700}+\frac{1}{7000}\right)$; **e)** $0{,}12-(20{,}5\cdot 1{,}07-6{,}935):400$.

3. Efectuați. **a)** $(13{,}14 \cdot 15 - 15 \cdot 3{,}14) \cdot (1{,}5 \cdot 0 + 0{,}1288 : 1{,}12)$; **b)** $[1{,}1(6) + 0{,}(36) + 1{,}25] : \frac{367}{396}$; **c)** $[0{,}1(36) + 0{,}(432) + 0{,}2 \cdot 0{,}(135) : 0{,}11] : \frac{221}{407}$.

4. Suma a două numere este 56. Aflați numerele știind că unul este $\frac{1}{7}$ din celălalt.

5. Aflați un număr care înmulțit cu $\frac{2}{5}$ dă același rezultat ca atunci când scădem $\frac{1}{4}$.

6. Dintr-un balot de pânză s-a vândut în prima zi $\frac{1}{4}$ din el, a doua zi $\frac{1}{3}$ din el, a treia zi $\frac{1}{2}$ din cât s-a vândut a doua zi, și au mai rămas 12 m. Câți metri are balotul ?

Rapoarte și proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor; proporții derivate; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție

Rețineți!

➲ Numărul rațional $a : b$, unde a și b sunt numere raționale pozitive, se numește **raportul** numerelor a și b.

Se notează $\frac{a}{b}$, iar a și b se numesc **termenii raportului**.

➲ Egalitatea a două rapoarte se numește **proporție**.

În general, o proporție are forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, unde $b \neq 0$, $d \neq 0$.

➲ Într-o proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor (**proprietatea fundamentală a proporțiilor**) $a \cdot d = b \cdot c$.

➲ Din proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se pot obține proporțiile:

$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, proporții care au aceiași termeni și de aceea se numesc **proporții derivate cu aceiași termeni**.

➲ Din proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se pot obține și proporțiile:

$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}; \frac{c}{d} = \frac{c-a}{d-b} (b \neq d); \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \frac{b+a}{b-a} = \frac{d+c}{d-c} (a \neq b; d \neq c);$

$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{c-d} (a \neq b; c \neq d)$

Spunem că am obținut **proporții derivate** cu alți termeni.

➲ Din $\frac{x}{b}=\frac{c}{d}$, se obține $x=\frac{bc}{d}$. Din $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ se obține $x=\frac{bc}{a}$.

➲ Șansa de realizare a unui eveniment (**probabilitatea** în cadrul unei experiențe poate fi evaluată printr-un raport al cărui numărător este numărul cazurilor favorabile evenimentului, iar numitorul este numărul cazurilor egal-posibile ale experienței).

Test 15

1. Să se determine raportul numerelor x și y știind că:

a) $x=\frac{1}{2}$ și $y=0{,}25$; **b)** $x=1{,}(6)$ și $y=0{,}1(6)$; **c)** $1{,}1(3)$ și $0{,}85$.

2. Știind că $\frac{a}{4}=\frac{25}{b}$, calculați $\frac{10a\cdot b}{4\cdot 25}$.

3. Aflați x din proporțiile: **a)** $\frac{x}{2}=\frac{15}{8}$; **b)** $\frac{17}{x}=\frac{34}{3}$; **c)** $\frac{n}{100x}=\frac{19\,999}{3}$, unde $n=19\,999^2-19\,999\cdot 999$.

4. Diferența a două numere naturale este 14. Aflați numerele, știind că raportul lor este: **a)** $\frac{3}{4}$; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{81}{67}$.

5. Știind că $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$, calculați: **a)** $\frac{3a+b}{2b}$; **b)** $\frac{3a+b}{3a+3b}$; **c)** $\frac{4a}{4a+7b}$.

Mărimi direct proporționale și mărimi invers proporționale

Test 16

1. Se dă $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=6$. Calculați: **a)** $\frac{a+b+c}{x+y+z}$; **b)** $\frac{3a+4b+5c}{3x+4y+5z}$; **c)** $\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$; **d)** $\frac{a^n+b^n+c^n}{x^n+y^n+z^n}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$; **e)** $\frac{ma+nb+pc}{mx+ny+pz}$ $(n,m,p\in\mathbb{N}^*)$.

2. Împărțiți numărul 2600 în părți direct proporționale cu numerele 2, 4 și 7.

3. Numerele naturale a, b, c, d sunt invers proporționale cu: 0,(3), 0,25, 0,1(6) și 0,(142857). Aflați numerele știind că :

a) $a+b+c+d=260$; **b)** $a^2+b^2+c^2+d^2=440$.

4. Media aritmetică a cinci numere naturale este 18,4. Aflați numerele, știind că primele trei sunt direct proporționale cu numerele 2, 3, 4 iar ultimele trei sunt invers proporționale cu numerele: 0,5, 0,(3) și 0,25.

5. Împărțiți numărul 120 în părți invers proporționale cu numerele 0,(3); 0,25 și 0,2.

Regula de trei simplă

Test 17

1. **a)** 6 stilouri costă 12 750 lei. Cât costă 17 stilouri de acelaşi fel?

b) 6 muncitori pot termina o lucrare în 15 zile. În câte zile vor termina aceeaşi lucrare, 18 muncitori?

2. 20 de muncitori pot realiza în 15 zile, 4500 de piese, dacă lucrează câte 8 ore pe zi. Câte piese realizează 15 muncitori în 10 zile, dacă lucrează câte 12 ore pe zi?

3. Într-o pungă cu 150 de lozuri, 120 sunt necâştigătoare. Care este probabilitatea ca primul loz extras să fie câştigător?

4. Care este probabilitatea ca aruncând două zaruri să obţinem un număr cub perfect prin adunarea punctelor de pe cele două feţe?

Procente. Probleme. Calculul probabilităţii realizării unui eveniment

Reţineţi!

➲ Cum aflăm $p\%$ dintr-un număr? $p\%$ din $a = \frac{p}{100} \cdot a$.

➲ Cum aflăm un număr când cunoaştem $p\%$ din el?

Dacă $p\%$ din $x = a$, atunci $x = \frac{a \cdot 100}{p}$.

➲ Cum aflăm raportul procentual? Dacă $\frac{p}{100}$ din $a = b$, atunci $p = \frac{100 \cdot b}{a}$.

➲ Concentraţia unei soluţii $= \frac{\text{masa dizolvatului}}{\text{masa soluţiei}}$.

Test 18

1. **a)** Un elev a depus la o bancă suma de 3500 lei. Ce sumă va avea el după un an în depozit, dacă dobânda este de 12% pe an? **b)** Un student depune la bancă 750 dolari S.U.A. După un an, observă că are 795 de dolari în cont. Ce dobândă a aplicat banca în acel an?

2. Pentru a obţine din grâu făină se pierde 30% din cantitatea de grâu. Din ce cantitate de grâu se obţin 350 kg de făină?

3. Pentru obţinerea unei oranjade, se amestecă 15 g suc de portocale, 85 g zahăr şi 900 g apă. Care este concentraţia de zahăr din oranjadă?

4. Un autoturism pleacă din Botoşani spre Iaşi, la ora 5 dimineaţa, şi ajunge în Iaşi la ora 7. Se întoarce, plecând din Iaşi la ora 11 şi 15 minute şi ajunge în Botoşani la ora 14. Cu cât la sută şi-a micşorat viteza la întoarcere, dacă presupunem că, pe toată distanţa a circulat cu viteză constantă?

5. Calculați probabilitatea de a alege: **a)** un număr prim din mulțimea numerelor naturale de la 9 la 40. **b)** un număr pătrat perfect dintre primele 100 de numere naturale nenule.

6. Calculați probabilitatea: **a)** de a alege un număr natural divizibil cu 5 din primele 94 de numere naturale; **b)** de a extrage dintr-o cutie un pix știind ca în ea se află 10 creioane și 25 de pixuri.

Test 19

1. Să se afle: **a)** 11% din 150; **b)** 7,5% din 350; **c)** 0,4% din 72.

2. Să se afle un număr știind că: **a)** 18% din el este 630; **b)** 1,4% din el este 2800; **c)** 115% din el este 9200000; **d)** 10,(3)% din el este 9300.

3. Să se afle: **a)** 25% din (15% din 10 500); **b)** 40% din (35% din 1600).

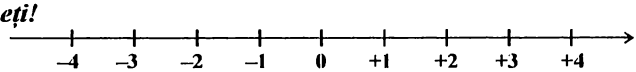
4. După trei reduceri consecutive respectiv cu 5%, 4% și 3%, prețul unui stilou este de 22 116 lei. Să se afle prețul inițial al stiloului.

5. Ce cantitate de apă conține 750 g soluție de apă cu sare cu concentrația de 5%?

6. O bancă acordă o dobândă anuală de 10%. Să se afle ce sumă de bani trebuie să depună un client pentru ca peste un an să aibă la bancă un depozit de 2420 lei.

Mulțimea $\mathbb{Z}$. Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$

Rețineți!



➲ Un număr întreg b divide un număr întreg a dacă există un număr întreg c astfel încât $a = b \cdot c$.

Observație. Din $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ rezultă că toate proprietățile divizibilității în $\mathbb{N}$ prezentate la pag.15 se extind în $\mathbb{Z}$ deoarece extinderea de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{Z}$ s-a realizat prin simetrizare, $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$. În $\mathbb{Z}$ apar proprietăți caracteristice acestei mulțimi de numere din care prezentăm:

1. a/b și $b/a \Rightarrow a = b$ sau $a = -b$ (adică $|a| = |b|$);
2. $a/1$ sau $a/(-1) \Rightarrow |a| = 1$;
3. $a/b \Leftrightarrow -a/b \Leftrightarrow a/(-b) \Leftrightarrow -a/(-b)$;
4. $a/b \Rightarrow b = 0$ sau $|a| \leq |b|$;
5. a/b și $|a| > |b| \Rightarrow b = 0$;
6. $(a, b) = (b, a) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b) = (|a|, |b|)$.

➲ Un număr întreg se numește număr prim dacă mulțimea divizorilor săi are cardinalul 4.

Observație. Condiția revine la $a \notin \{-1; 0; 1\}$ și $D_a = \{-1; 1; -a; a\}$.

➲ Un număr întreg a, $a \notin \{-1; 0; 1\}$ care nu este prim se numește **compus.**

Test 20

1. Să se efectueze: **a)** $-10+(-17)+27+3$; **b)** $-21-(-13)-15-(+25)$; **c)** $(-21)\cdot(+10):(-70)$; **d)** $(-2)^3\cdot(-2)^{70}:4^{35}$; **e)** $-45:(-3)\cdot 20$.

2. Să se efectueze: **a)** $-2+(-17+13)+(22+13-15)-12$; **b)** $122-(-25+47)-(45+5-100)$; **c)** $2\cdot(-12+13):(-22+18+2)$; **d)** $[-180:(-2^2)+35-25:(-5)]:17$; **e)** $2^3\cdot[145:(-29)+13-19]+2^4\cdot 5$.

3. Să se calculeze: **a)** $-135:3^3+14\cdot[-2+17+25-140+(-2)\cdot(-50)]^{19}$; **b)** $26+70:(-5)+[(-3)\cdot(-2)\cdot(-5)+15:(-3)+(-1)^{1000}+75:(-3)]:(-59)$.

4. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile: **a)** $2x=-8$; **b)** $x+15=5$; **c)** $y-8=-4$; **d)** $5x+1=-4$; **e)** $2\cdot(-x+2)=-52$; **f)** $-4x-1=-3x+7$; **g)** $-3x+10=2x+35$; **h)** $-2\cdot(x-3)=4$; **i)** $11x+7=-10x-14$; **j)** $-12x-11=7x+11$.

5. Aflați $x\in\mathbb{Z}$ așa încât: **a)** $\frac{3}{x}\in\mathbb{Z}$; **b)** $\frac{-4}{x-4}\in\mathbb{Z}$; **c)** $\frac{x-4}{x-3}\in\mathbb{Z}$.

6. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile: **a)** $x^2+1=10$; **b)** $|x-2|=7$; **c)** $|x+2|+|x^2-4|=0$; **d)** $(x-1)(x-2)=12$; **e)** $(x-1)(y+4)=10$; **f)** $(y+2)(x-7)=13$.

Test 21

1. **a)** Așezați în ordine crescătoare numerele: $-5;3;-|-4|;-17;|5|;0;12;-15;|+7|;(-5)^0$. **b)** Reprezentați pe axă numerele de la punctul **a)**.

2. Calculați: **a)** $-8+10-17+8-10+15$; **b)** $10^0+(-15):3-7\cdot(-2)$; **c)** $13-(-2)-[(-5)+(+3)]-(-7)$; **d)** $(-3)\cdot\{-2+4\cdot[(-5)\cdot(+2)-(-1)\cdot(+3)-(-5)]-(-6)\}$; **e)** $-2+\{(-12)+[(-12):(-4)-(-3)\cdot(+2)]+(-910):(+13)\}:(-73)$; **f)** $[(+7)-(-3)]\cdot[(+7)^2+(+7)\cdot(-3)+(-3)^2]$; **g)** $[(-2)^{105}:4^{50}+(-18)^2:54+6]:(-10)$; **h)** $[2^2+(-3)^9:(+3)^7+(-5)^{10}:5^9]:(-10)^{10}$; **i)** $\left(2^{444}+\left|3^{333}-2^{444}\right|\right):(-27)^{111}$; **j)** $(-1)^n+2\cdot(-1)^{n+1}+3\cdot(-1)^{n+2}$; **k)** $[3^{4444}-|(-1)^n\cdot(2^{6666}-3^{4444})|]:[(-8)^2]^{1111}$, $n\in\mathbb{N}$.

3. Se consideră mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{Z}/|x|=1\}$, $B=\{y\in\mathbb{Z}/|y|+3<11\}$, $C=\{z\in\mathbb{Z}/|z-5|=4\}$, $D=\{t\in\mathbb{Z}/|t+3|\le 5\}$. Să se afle $(A\cap B\cap D)\cup C$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuațiile: **a)** $1-3x=-8$; **b)** $2x-3(5-x)=7x+1$; **c)** $4x-5(2x+3)=-2+3(1-x)$; **d)** $(x-1)(y-2)=6$; **e)** $x^2=25$;

f) $|x+1|+\sqrt{y^2+2y+2}=3$; **g)** $x:(-9)=-6$; **h)** $|x-3|=2$; **i)** $|x+1|=-5$;
j) $|x|=10$; **k)** $x^2+5=9$; **l)** $(x^2-1)(y+3)=-6$

5. Fie numerele $x=\left[-2^2+(-2)^2+(-1)^{n^2}\right]\cdot\left[-2^2-(-2)^2-1^n\right]\cdot(-1)^n$; $n\in\mathbb{N}$. Calculați $(x+|x|)^{1999}$.

Test 22

1. Se consideră mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{Z}/x/24\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}/x/6\}$.

a) Să se afle mulțimile: A, B, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$.

b) Să se afle suma elementelor din fiecare mulțime. Ce observați?

2. Determinați numărul divizorilor întregi ai numerelor: **a)** 12; **b)** 6^3; **c)** 28^3; **d)** 1800; **e)** 1 440; **f)** 5 390; **g)** –24; **h)** -8^3; **i)** -36^2.

3. a) Determinați $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât: **1)** $\frac{12}{1-2x}\in\mathbb{Z}$; **2)** $\frac{x+2}{x-2}\in\mathbb{Z}$.

b) Determinați $x\in\mathbb{N}$ astfel încât: **1)** $\frac{8}{2x-1}\in\mathbb{Z}$; **2)** $\frac{x+1}{x-1}\in\mathbb{N}$.

4. Determinați toate numerele de forma $2^x\cdot 3^y$ care au: **a)** 12 divizori întregi; **b)** 30 de divizori naturali; **c)** 6 divizori întregi.

5. Aflați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții: **a)** $3/n(n-1)(n+1)$; **b)** $4/n(n-2)(n-1)(n+1)$; **c)** $7/n(n-1)(n-2)(n-3)(n+1)(n+2)(n+3)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}^*$.

Test 23

1. Calculați: **a)** $|-4|-|-2|+|+8|-|-10|+8$; **b)** $3^0+(-70):(-14)+4\cdot(-3)$;
c) $[(-3)^{140}:9^{69}+(-6)^4:(3^3\cdot 2^4)+12]:(-4)$; **d)** $-(3^3\cdot 7^7\cdot 11^2)^3:(3^8\cdot 7^{20}\cdot 11^6)$.

2. a) Determinați: $D_{12}\cap D_{18}$ și $D_{-8}\cap D_{12}$. **b)** Aflați $x\in\mathbb{Z}$, astfel încât:

1) $\frac{6}{1-x}\in Z$; **2)** $\frac{4}{2x-3}\in Z$; **3)** $\frac{x-1}{x+1}\in N$; **4)** $\frac{2x-1}{x+1}\in Z$.

3. Rezolvați în Z ecuațiile: **a)** $|x+3|=-1$; **b)** $|x-1|=4$;
c) $|2x+1|=7$; **d)** $|x-1|+|x+1|=2$; **e)** $|6-2x|+|x-3|+|x^2-9|=0$.

4. Se dă șirul de rapoarte: $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}=\frac{8}{z}=\frac{2}{t}$. Aflați x, y, z, t știind că $z=t^2$.

Test 24

1. Se dau mulțimile $A=\{x \in \mathbb{Z} / x=4n, n \in \mathbb{Z}\}$; $B=\{y \in \mathbb{Z} / y=4n+1, n \in \mathbb{Z}\}$, $C=\{t \in \mathbb{Z} / t=4n+2, n \in \mathbb{Z}\}$, $D=\{w \in \mathbb{Z} / w=4n+3, n \in \mathbb{Z}\}$. Calculați: $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$; $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \setminus B$; $C \setminus B$.

2. Determinați $x, y \in \mathbb{Z}$ știind că $\{3; x^2+1; 10\} = \{3; 5; 4-2y\}$.

3. Fie mulțimile: $A=\{-3; 4; 5\}$; $B=\{-1; 2\}$; $C=\{-3; -2; 1; 3\}$. Determinați mulțimile: $A \cup B$; $A \cap C$; $A \times B$; $B \times A$; $A \setminus B$; $(A \setminus B) \cap (A \cup C)$.

4. Determinați elementele mulțimilor: $A = \{x \in \mathbb{N}^* / 2x \leqslant 9\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N} / \frac{7}{x-2} \in \mathbb{N}\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} / \frac{-6}{x+1} \in \mathbb{Z}\}$; $D = \{x \in \mathbb{Z} / \frac{x-2}{x+1} \in \mathbb{Z}\}$;

$E = \{(x, y) / 2x+3y=12; x, y \in \mathbb{N}\}$; $F = \{x \in \mathbb{Z} / \frac{9}{2x-1} \in \mathbb{Z}\}$.

Test 25[*]

I. 1. Rezultatul calculului: $(-2)^0 + (-3) : (+1) - (-1)^{100}$ este:
a) -4; **b)** 3; **c)** -1; **d)** -3.

2. Numărul de elemente al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} / x / 12\}$ este:
a) 6; **b)** 12; **c)** 5; **d)** 24.

3. Mulțimea soluțiilor ecuației $6x^2 - 54 = 0$ este: **a)** $\{-9; 9\}$; **b)** $\{-3; 3\}$; **c)** $\{-5; 5\}$; **d)** $\{-2; 4\}$.

4. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{Z} / |x| = 1\}$ și $B = \{y \in \mathbb{Z} / |y| \leq 2\}$. Mulțimea $A \cap B$ este: **a)** $\{-1; +1\}$; **b)** $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; **c)** $\{0; 1; 2\}$; **d)** $\{-2; -1; 0\}$.

5. Numărul întreg x pentru care numerele $3-2x$ și $2x+8$ sunt naturale consecutive este: **a)** -2; **b)** -5; **c)** -1; **d)** 3.

6. Produsul a 51 de numere întregi consecutive este 0. Cea mai mare valoare pe care o poate lua suma lor este:
a) -1275; **b)** 3275; **c)** 275; **d)** 1275.

7. Mulțimea soluțiilor ecuației: $|x-2| = -3$ este: **a)** $\{-2; 3\}$; **b)** $\{5; 8\}$; **c)** $\{-1; 5\}$; **d)** $\emptyset$.

8. Valoarea expresiei: $|a-2| + |a+2| - |a| + |a-6|: (-4)$, pentru $a = -2$ este: **a)** -1; **b)** -2; **c)** 0; **d)** 1.

---

[*] La fiecare din problemele 1 - 9 numai un răspuns este corect.

9. Rezultatul calculului: $(-1)^{4k} + (-1)^{4k+1} + (-1)^{4k+2} + (-1)^{4k+3}$, $k \in \mathbb{N}$ este: **a)** 4; **b)** -2; **c)** 0; **d)** 1.

II. 10. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{-5}{x-2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

11. Comparați numerele: $a = (-1)^1 + (-2)^2 + ... + (-1)^{2003}$;
$b = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot ... \cdot (-1)^{2003} \cdot (-1)^{2004}$ și
$c = 2 \cdot (-1)^{2n} - 7 \cdot (-1)^{2n+1} + 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.

12. Fie numerele: $a = 10^{2n} : (4 \cdot 25)^{n-1} \cdot x$, unde $n \in \mathbb{N}$ și $b = 51 \cdot 50 - 50 \cdot 49 + 49 \cdot 48 - 48 \cdot 47 + ... + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1$. Determinați numărul întreg x astfel încât numerele a și b să fie numere întregi opuse.

ALGEBRĂ

CLASA a VII-a

Mulțimea numerelor raționale. Modul. Ordonare. Operații. Ecuații în $\mathbb{Q}$

Test 26

1. Se consideră mulțimea:

$$A = \left\{ 2; (-5)^0; -7,5; 0; 1\frac{1}{2}; -2\frac{3}{8}; -\frac{7}{6}; -15; 0,(17); 5,6 \right\}$$ **a)** Scrieți în ordine crescătoare elementele mulțimii A; apoi, reprezentați-le pe axă.
b) Efectuați: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \setminus \mathbb{Z}$; $A \setminus \mathbb{Q}_+$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \setminus \mathbb{Q}_-$.

2. Rezolvați în $\mathbb{Q}$: **a)** $x - 0,25 = 0,(3)$; **b)** $3(x-3) = -2 + \frac{x-3}{2}$; **c)** $\frac{1}{2} \cdot (x-2) - \frac{x+2}{-3} = \frac{3x}{4}$; **d)** $|x-3| = \frac{1}{2}$; **e)** $x^2 = \frac{4}{9}$; **f)** $|3x-2| = \frac{1}{3}$.

3. Calculați: **a)** $\left|2-\frac{1}{4}\right| + \left|1-\frac{3}{2}\right| - \left|\frac{2}{3}-4\right|$; **b)** $\left(5\frac{1}{3} - 4\frac{1}{4} - 2\frac{1}{6}\right) : \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{-2} + \frac{-1}{3} + 1\right)$;
c) $[-2,7+0,(3)] : \left[(-0,5)^2 + \left(-\frac{15}{26}\right) : \frac{25}{39}\right]$; **d)** $(-2,15 + 3,02 - 1,47) : [(-0,2)^3 + (-0,3)^2 - 0,282]$; **e)** $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{21}\right]^3 + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{21} + \left(\frac{1}{16}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}$; **f)** $\left(3-\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{11}{4}\right)^2$.

4. Calculați: **a)** $|2-x| - |2x-3| + |x|$, pentru $x < 0$. **b)** $(-2) \cdot (-1)^{n+1} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot (-1)^n - (-25)^0 \cdot (-1)^{3n}$; **c)** $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - ... - \frac{1}{n(n+1)}$.

Test 27

1. Calculați: **a)** $\frac{27}{72}-\frac{45}{24}+\frac{32}{36}$; **b)** $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{4}{25}$;

c) $\left(\frac{5}{-3}\right)\cdot\left(\frac{-7}{10}\right)\cdot\left(\frac{-4}{-21}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)$; **d)** $\left(\frac{2}{3}-1\frac{4}{5}+\frac{13}{9}\cdot\frac{27}{39}\right):\left(\frac{2}{3}-1\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)$;

e) $0,1(2):\frac{-1}{3}:2,(4):\frac{33}{-10}$; **f)** $-0,75\cdot\left(1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}-5\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{5}{16}\right)$;

g) $[0,(81)+0,(63)]:\left(\frac{43}{19}+\frac{1}{19}\right)$; **h)** $\left[0,8(3):0,625-0,3(6):\frac{11}{35}\right]:0,2(7)$.

2. Calculați: **a)** $-16,7-(-4,2)$; **b)** $(-7,4)\cdot 4,5$; **c)** $-1,34\cdot(-26,8)$;

d) $-0,125:(-0,25)$; **e)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; **f)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^7:\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; **g)** $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^3$;

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4:\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; **i)** $\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(-\frac{2}{3}\right)^5+\left(-\frac{1999}{2000}\right)^0$.

3. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuațiile: **a)** $4x-5=x+3$; **b)** $5(4x-3)=17$;

c) $\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}=x-\frac{1}{2}$; **d)** $4x-(-3x+2)=12$; **e)** $2,5x+0,6=8,6$; **f)** $8x-0,7x=$

$=6,3x+4$; **g)** $-9x+3,2=2(x-5)$; **h)** $|3x-1|=7$; **i)** $|x|=1,96$.

Media aritmetică a unor numere raționale pozitive. Media geometrică a două numere raționale pozitive

Rețineți!

➲ Fiind date numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, numărul $m_a=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, se numește media lor **aritmetică**.

➲ Fiind date numerele reale pozitive a și b, numărul $m_g=\sqrt{ab}$, se numește media lor **geometrică** sau **proporțională**.

Test 28

1. Calculați media aritmetică a următoarelor numere: **a)** 4 și 16; **b)** $(-3)^2$ și 0,16; **c)** 0,(1) și 0,(8); **d)** 0,25; 1,1(6); 0,(36); **e)** $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$; $\frac{3}{5}$; $3\frac{1}{2}$; $1\frac{7}{10}$.

2. Media aritmetică a patru numere naturale este 170. Al patrulea număr este 80. Aflați media aritmetică a celorlalte trei numere.

3. Știind că $\frac{2ab}{a+b}=144$, să se afle media aritmetică a numerelor a și b știind că produsul lor este 24.

4. Media aritmetică a numerelor 8, 9, 12 și x este 10. Aflați numărul x.

5. Un meteorolog a înregistrat temperatura mediului în fiecare zi, pe parcursul unei săptămâni și a trecut rezultatele în tabelul următor:

L	M	M	J	V	S	D
23°	14°	12°	18°	25°	28°	27°

a) În ce zi s-a înregistrat temperatura maximă în acea săptămână?

b) Care a fost temperatura medie în acea săptămână?

Test 29

1. Aplicând diferite forme echivalente ale inegalității $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, demonstrați că: **a)** $a \cdot b \le \frac{3}{4}$, dacă $a+b=\sqrt{3}$ și $a, b>0$; **b)** $a+b \ge 2$, dacă $a \cdot b = 1$ și $a, b>0$; **c)** $(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c) \ge 8abc$, dacă $a, b, c>0$.

2. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor: **a)** 1 și 99; **b)** 3,(6) și $\frac{1}{3}$; **c)** $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ și $\sqrt{\sqrt{5}-2}$; **d)** $\left(\sqrt{20}-\sqrt{19}\right)$ și $\sqrt{20}+\sqrt{19}$.

3. Să se afle trei numere raționale, știind că două câte două au media aritmetică: **a)** 60; 61; 62; **b)** 2,56; 3,25; 4,75..

4. Un biciclist parcurge distanța de 60 km dintre două localități cu 20 km/h la ducere și cu 30 km/h la întoarcere. Care este viteza medie pe întreaga călătorie?

5. Care este prețul mediu obținut de un agricultor, pe struguri, știind că a vândut 40 kg cu 0,80 lei/kg și 60 kg cu 0,60 lei/kg?

Numere reale

Modulul unui număr real. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real. Rotunjirea și aproximarea unui număr real

Rețineți! Valoarea **absolută** sau **modulul** unui număr real x, notată $|x|$, se definește astfel:

$$|x|=\begin{cases}-x, \text{dacă } x<0,\\ 0, \text{dacă } x=0\\ x, \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

PROPRIETĂȚI:

1. $|x| = \max(-x, x)$;
2. $x \le |x|$ și $-x \le |x|$;
3. $|x| \ge 0$;
4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$;
7. $|x+y| \le |x| + |y|$;
8. $|x| \le u, u > 0 \Leftrightarrow -u \le x \le u$;
9. $\sqrt{x^2} = |x|$;

10. Orice număr real pozitiv se reprezintă printr-o fracție zecimală de forma $x = \overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$, unde a_0 este **partea întreagă** a lui x și se notează cu $[x]$, iar $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$ este **partea fracționară** a lui x și se notează $\{x\}$. Avem $x = [x] + \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

11. Orice număr real negativ x $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ se reprezintă printr-o fracție zecimală de forma $x = \overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$, unde $a_0 - 1$ este partea întreagă a lui x, iar $1 - \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$ este partea fracționară a lui x. Avem $x = [x] + \{x\}$. Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[x] = x$ și $\{x\} = 0$.

Test 30

1. Se consideră mulțimea: $A = \left\{-\frac{5}{2}; \sqrt{0}; 1; \sqrt{9}; -\sqrt{16}; \sqrt{2}; -\sqrt{5}; \pi; -\sqrt{2,25}; \sqrt{0,09}\right\}$

a) Scrieți în ordine crescătoare elementele mulțimii A. **b)** Efectuați: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \setminus \mathbb{Q}$; $A \cap \mathbb{Q}$.

2. Calculați: **a)** $\sqrt{(-5)^2}; \left(\sqrt{2}\right)^2; \sqrt{260}$; **b)** $\sqrt{6,25}; \sqrt{1,0609}$; **c)** $\sqrt{0,16} + \sqrt{2\frac{1}{4} - \sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}} : \sqrt{0,(4)}$; **d)** $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{27}$; **e)** $\sqrt{(1-x)^2} + |5x-4| - 6 \cdot \sqrt{x^2}$, unde $x < 0, x \in \mathbb{Q}$.

3. Calculați $\sqrt{2}$ și $\sqrt{5}$: **a)** cu două zecimale exacte; **b)** cu aproximație de o zecime prin adaos; **c)** cu aproximație de o zecime prin lipsă.

4. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b, unde $a = \sqrt{625} - \sqrt{102,01} : \left(4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} : \frac{5}{8}\right)$ și $b = \frac{2,5 - 5,(6)}{-19} + \sqrt{0,69(4)} + \sqrt{25}$.

5. Aflați partea întreagă și partea fracționară a numerelor: 3,14; 0,034; −3,14; −5,324.

Test 31

1. O urnă conține 80 de bile identice, numerotate cu 1,2,3,...,79,80. Care este probabilitatea ca extrăgând o bilă la întâmplare, aceasta să fie numerotată cu un pătrat perfect?

2. Aflați fracțiile $\frac{9}{a^2}, \frac{16}{b^2}, \frac{25}{c^2}$, știind că sunt reprezentanți ai aceluiași număr rațional pozitiv și $2c + 3b - 4a = 40$.

3. Calculați **a)** $\sqrt{1225}$; **b)** $\sqrt{10609}$; **c)** $\sqrt{2,25}$; **d)** $\sqrt{51,84}$; **e)** $\sqrt{\frac{169}{400}}$; **f)** $\sqrt{\frac{784}{576}}$; **g)** $\sqrt{0,015129}$; **h)** $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$; **i)** $\sqrt{75}-\sqrt{48}-\sqrt{300}$.

4. **a)** Aflați primele trei cifre ale fracției zecimale ce reprezintă pe $\sqrt{14}$. **b)** Arătați că $\sqrt{7}$ nu este număr rațional. **c)** Determinați numerele de forma $\overline{4ab}$ pătrate perfecte $(a \neq b)$.

Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

Test 32

1. Să se efectueze: **a)** $2x+3x$; **b)** $5ab+7ab$; **c)** $7x^2y+\left(-2x^2y\right)$; **d)** $3x^2+\left(-4x^2\right)$; **e)** $x^2-2x-2x^2+3x$; **f)** $3x^2-7x+3-2x^2+6x-3$; **g)** $2x^3-4x^2-\left(x^3-4x^2\right)$; **h)** $4x^2-8x-8+3x^3+7x^2+7x$; **i)** $5xy^2-2x^2y+3xy^2+4x^2y$; **j)** $2\left(x^2-2x+3\right)-5\left(x^2-x+1\right)$; **k)** $\left(5x^2-x\right)-\left(2x^2+3x-1\right)+\left(x^2-x\right)$; **l)** $3(x-4)-7\left(x^2-2x\right)+4\left(x^2-1\right)$; **m)** $\sqrt{32}\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)-\sqrt{8}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}x\right)$; **n)** $\sqrt{27}\cdot\left(\sqrt{3}x-\sqrt{3}\right)-\sqrt{12}\cdot\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}x\right)$.

2. Să se efectueze: **a)** $2\left(x^2-4x\right)$; **b)** $x(x+1)$; **c)** $2x\left(x^3-4x+4\right)$; **d)** $3x^2\left(x^3-x+4\right)$; **e)** $3\left(\frac{7}{9}x-2\right)-\frac{x}{2}(4x-5)$; **f)** $2k^2(k-3)-k\left(3k^2-5k+1\right)$; **g)** $(x+1)(x+3)$; **h)** $\left(2x^2-1\right)\left(x^3+4\right)$; **i)** $\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$; **j)** $x\left(xy-y^2+3\right)-y\left(xy-x^2\right)$; **k)** $(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right)$; **l)** $(y-1)(y^2+y+1)$.

3. Să se efectueze: **a)** $x^3:x$; **b)** $2x^4:\left(-x^2\right)$; **c)** $\frac{1}{4}x^5:\left(-\frac{1}{16}x^3\right)$; **d)** $\left(-25x^5y^4z^3\right):\left(-5x^4y^2z\right)$; **e)** $3\sqrt{15}x^5z^4:\left(-3\sqrt{5}x^4z^2\right)$; **f)** $\left(x^5-3x^4\right):\left(-x^3\right)$; **g)** $\left(x^3-2x^2\right):x^2$; **h)** $\left(16x^6-8x^4+4x^2\right):\left(-2x^2\right)$; **i)** $(4x^4y^3-16x^5y^4):(-4x^3y^3)$; **j)** $\left(3\sqrt{2}x^5-\sqrt{72}x^4\right):\left(-\sqrt{2}x^3\right)$; **k)** $\left(4x^3y^2+2xy^2+y^4x^3\right):y^2$; **l)** $\left(5x^4y^3-\sqrt{2}x^3y^4+3x^4y^4-\sqrt{3}x^5y^2\right):(x^3y^2)$; **m)** $x^{-7}:x^{-3}$; **n)** $x^{-5}\cdot x^4\cdot x^{-3}$; **o)** $(x^4)^{-3}:(x^{-2})^3$.

Formule de calcul prescurtat

Test 33

1. Să se efectueze: **a)** $(x+1)^2$; **b)** $(x+2)^2$; **c)** $(x+3)^2$; **d)** $(x+7)^2$; **e)** $(x+5)^2$; **f)** $(2x+1)^2$; **g)** $(3x+2)^2$; **h)** $(5x+7)^2$; **i)** $\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)^2$; **j)** $\left(2\sqrt{3}x+1\right)^2$; **k)** $\left(3\sqrt{5}x+2\right)^2$; **l)** $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$; **m)** $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$; **n)** $\left(\sqrt{5}+3\right)^2$; **o)** $\left(2\sqrt{3}+1\right)^2$; **p)** $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2$; **q)** $\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^2$; **r)** $\left(5\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)^2$; **s)** $\left(2\sqrt{6}+10\sqrt{3}\right)^2$; **ş)** $(2x+3y)^2$; **t)** $\left(3x^2+2y\right)^2$; **ţ)** $\left(4x+\sqrt{3}\right)^2$.

2. Să se efectueze: **a)** $(x-3)^2$; **b)** $(x-5)^2$; **c)** $(x-1)^2$; **d)** $(x-10)^2$; **e)** $(x-11)^2$; **f)** $(2x-3)^2$; **g)** $(3x-5)^2$; **h)** $(5x-3)^2$; **i)** $(7x-4)^2$; **j)** $\left(\sqrt{3}x-1\right)^2$; **k)** $\left(\sqrt{2}x-2\right)^2$; **l)** $\left(2\sqrt{3}x-1\right)^2$; **m)** $\left(3\sqrt{3}x-2\sqrt{2}\right)^2$; **n)** $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$; **o)** $\left(\sqrt{3}-2\right)^2$; **p)** $\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$; **q)** $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$; **r)** $\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)^2$; **s)** $\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{15}\right)^2$; **ş)** $(3x-2y)^2$; **t)** $(2x-5y)^2$; **ţ)** $\left(2x-\sqrt{5}\right)^2$.

3. Să se efectueze: **a)** $(x-1)(x+1)$; **b)** $(x-2)(x+2)$; **c)** $(x-3)(x+3)$; **d)** $(x+4)(x-4)$; **e)** $(2x-1)(2x+1)$; **f)** $(5x-3)(5x+3)$; **g)** $(3x-4)(3x+4)$; **h)** $(5-x)(x+5)$; **i)** $(1-2x)(2x+1)$; **j)** $(7x+1)(1-7x)$; **k)** $(-x-1)(x-1)$; **l)** $(-3x-3)(3x-3)$; **m)** $\left(2\sqrt{2}x-1\right)\left(2\sqrt{2}x+1\right)$; **n)** $\left(3\sqrt{3}-2\right)\left(3\sqrt{3}+2\right)$; **o)** $\left(5\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{7}+3\sqrt{3}\right)$; **p)** $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$; **q)** $(3x-2y)(3x+2y)$; **r)** $(5x-4y)(5x+4y)$; **s)** $(x-1)\cdot(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$.

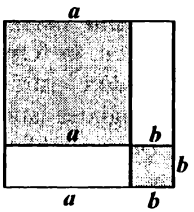
4. Să se efectueze: **a)** $(x-1)^2+(x+1)^2$; **b)** $(2x-3)^2+(2x+1)^2-$ $-(x-1)(x+1)$; **c)** $(2x-1)(2x+1)-(x-3)^2+(2x+3)^2$; **d)** $2(x-3)(x+3)-$ $-2(x-2)^2+(x+4)^2$; **e)** $\left(2\sqrt{2}-1\right)^2-\left(2\sqrt{2}-3\right)\left(2\sqrt{2}+3\right)+\left(3\sqrt{2}+2\right)^2$; **f)** $(2x-y)^2-(x-y)^2+(x+y)(x-y)$; **g)** $(x+y)^2+(x-y)(x+y)+(x-y)^2$; **h)** $(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)\left(x^4+16\right)-\left(x^2-16\right)\left(x^2+16\right)$.

5. a) Dacă $a+b=7$ şi $a\cdot b=5$, să se afle a^2+b^2. **b)** Dacă $a^2+b^2=25$ şi $a\cdot b=4$, aflaţi $a+b$ şi $a-b$. **c)** Dacă $a^2+b^2=84$ şi $a+b=8$, să se afle $a\cdot b$ şi $a-b$. **d)** Dacă $a^2-b^2=40$ şi $a+b=10$, să se afle a^2+b^2 şi ab.

6. Ionel decupează dintr-o bucată de carton în formă de pătrat suprafața haşurată din figura alăturată (două pătrate de latură a, respectiv b).

a) Care bucată de carton are suprafața mai mare, cea haşurată sau cea nehaşurată?

b) Cele două suprafețe de carton pot fi egale?



Descompunerea în factori

Test 34

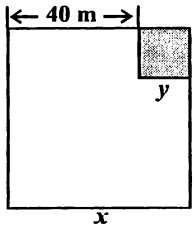
1. Descompuneți în factori scoțând factorul comun: **a)** $2x-4$; **b)** $25x-5$; **c)** $3x-9$; **d)** x^2-2x; **e)** $3x^3-x^2$; **f)** $4x^2-16x$; **g)** $3x^3-9x^2$; **h)** $9x^2-3xy$; **i)** $16x^5y^4-4x^3y^3$; **j)** $2\sqrt{3}x^3-4\sqrt{3}x^2$; **k)** $\sqrt{50}x^3y^2+\sqrt{32}x^4y^2$; **l)** $\sqrt{180}x^7+\sqrt{45}x^5+\sqrt{125}x^6$; **m)** $3(x-2)^2-(x-2)(x+3)+4(x-2)$; **n)** $(2x-5)(x+3)-2(2x-5)^2+7(2x-5)$; **o)** $5x(2x+5)-3(2x+5)$.

2. Restrângeți ca pătratul unei sume: **a)** x^2+2x+1; **b)** x^2+4x+4; **c)** x^2+6x+9; **d)** $4x^2+4x+1$; **e)** $9x^2+6x+1$; **f)** $9x^2+12x+4$; **g)** $x^2+x+\frac{1}{4}$; **h)** $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$; **i)** $x^2+2xy+y^2$; **j)** $4x^2+4xy+y^2$; **k)** x^4+2x^2+1; **l)** $4x^2+12xy+9y^2$; **m)** $x^2+2\sqrt{2}x+2$; **n)** $3x^2+2\sqrt{3}x+1$; **o)** $2x^2+2\sqrt{6}x+3$; **p)** $5x^2+2\sqrt{10}x+2$.

3. Restrângeți ca pătratul unei diferențe: **a)** x^2-6x+9; **b)** x^2-4x+4; **c)** $x^2-10x+25$; **d)** $4x^2-4x+1$; **e)** $9x^2-6x+1$; **f)** $25x^2-10x+1$; **g)** $x^2-4xy+4y^2$; **h)** $25z^2-20yz+4y^2$; **i)** $7y^2-2\sqrt{7}y+1$; **j)** y^4-4y^2+4; **k)** $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1$; **l)** $\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{5}xy+\frac{1}{25}y^2$; **m)** $\frac{1}{2}y^2-\frac{\sqrt{6}}{3}yz+\frac{1}{3}z^2$.

4. Descompuneți în factori: **a)** x^2-4; **b)** x^2-9; **c)** x^2-49; **d)** x^2-121; **e)** $4x^2-1$; **f)** $25y^2-4$; **g)** $49y^2-25z^2$; **h)** $121x^2y^2-9z^2$; **i)** $2x^2-1$; **j)** $5x^2-3y^2$; **k)** $7x^2y^2-4z^2$; **l)** x^4-y^4; **m)** $256x^8-625y^8$; **n)** $y^{16}-z^{16}$; **o)** $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{25}y^2$; **p)** $3x^2-\frac{1}{16}$; **q)** $8y^2-\frac{1}{121}$.

5. Figura alăturată reprezintă schematic grădina lui Popescu, în formă de pătrat cu latura de lungime x. Popescu construieşte în colţul grădinii o casă pătrată cu lungimea laturii y.



a) Dacă suprafaţa neconstruită a grădinii lui Popescu este egală cu 3200 m^2, aflaţi perimetrul terenului rămas după construirea casei.

b) Care este suprafaţa construită?

Test 35

1. Descompuneţi în factori: **a)** $xa+xb+ya+yb$; **b)** $x^2a+x^2b+y^2a+y^2b$; **c)** $xy-xb-ay+ab$; **d)** y^3+y^2+3y+3; **e)** z^3+z^2+4z+4; **f)** $y^2(z-1)-16z+16$; **g)** $ay-by+ay^2-by^2$; **h)** $ax^2+axy+bx^2+bxy$.

2. Descompuneţi în factori: **a)** x^3+4x^2+4x; **b)** $x^4+6x^3+9x^2$; **c)** $y^3+16y^2z+64yz^2$; **d)** $x^2z^2-10xz^2+25z^2$; **e)** $2x^3-28x^2+98x$; **f)** $2\sqrt{2}x^3-4x^2+\sqrt{2}x$; **g)** x^3-xy^2; **h)** $2x^5-32x$; **i)** $3x^6-243x^2$; **j)** $(x+1)^2-1$; **k)** $(2x+3)^2-9$; **l)** $(2y-\sqrt{3})^2-27$; **m)** $(4y-z)^2-(2y+z)^2$; **n)** $(4x+3)^2-(2x+4)^2$; **o)** $x^4+2x^2+1-z^2$; **p)** $x^2+2xy+y^2-z^2-2z-1$; **q)** x^4-x^2-6x-9; **r)** $(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1$; **s)** x^4-4x^2+4x-1.

3. Descompuneţi în factori: **a)** x^2+5x+4; **b)** x^2+6x+5; **c)** x^2+5x+6; **d)** $y^2+9y+20$; **e)** x^2-3x+2; **f)** z^2-5z+4; **g)** $y^2-9y+14$.

Test 36

1. Calculaţi: **a)** $3x-8y-13x+9y+1$; **b)** $(-3x^2-2x+1)-(-5x^2+6x-3)$; **c)** $(5x^2-x+13)-(12-13x+5x^2)$; **d)** $-3x^2\cdot(x^2-2x+5)+3x^4$; **e)** $(2x-3)\cdot(x^2-3x+2)$; **f)** $(32x^4-20x^3+12x^2):(-4x^2)$; **g)** $\frac{3}{4}x^3-\left(\frac{1}{2}x-3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)+\left(\frac{5}{6}x^4-x^3\right):\left(-\frac{1}{3}x^2\right)$.

2. Efectuaţi, folosind (acolo unde este cazul) formulele de calcul prescurtat: **a)** $2\cdot(3x+y)(3x-y)-3\cdot(2x-5y)^2+(y+2x)^2$; **b)** $2x\cdot(3x-4)-(x-3)^2+(3x-2)(2+3x)$; **c)** $(3a+2b-c)(3a-2b+c)$.

3. Descompuneți în factori: **a)** $13x^4 - 39x^3 + 26x^2$; **b)** $(2x - 1) \cdot 25x^2 - -10x \cdot (2x - 1) + 2x - 1$; **c)** $4x^2 - y^4$; **d)** $(2x + 3)^2 - 25$; **e)** $\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + x^2$; **f)** $25x^2 \cdot \cdot (x+1)^2 - x^2 - 2x - 1$; **g)** $81x^4 - \frac{1}{16}$; **h)** $3x^3 + 6x^2 - 9x$; **i)** $10x^4 - 15x^3 + 5x^2$; **j)** $y^4 - 1$; **k)** $x^4 - (2x + 1)^2$.

Ecuații în R

Test 37

1. Care din propozițiile următoare sunt ecuații?
a) $x + 3 = 4$; **b)** $2x = x + 3$; **c)** $3x = 2x + 1 = 6$; **d)** $4x - 1 \le x$.

2. Verificați dacă 3 este soluție pentru ecuațiile:
a) $x - 1 = 2$; **b)** $3x - 5 = x + 1$; **c)** $5x - 6 = 2(1 - 4x)$.

3. Scrieți patru ecuații echivalente cu ecuația $3x - 2 = 3 - 2x$.

4. Rezolvați, în R, ecuațiile: **a)** $\frac{2}{3}x = 0$; **b)** $3x = \frac{1}{3}x$; **c)** $x = 2x - \sqrt{2}$;
d) $\frac{2x}{3} = 1 - \frac{x}{4}$; **e)** $(3x-4)^2 = (2x-3)(2x+3) + 5x^2$; **f)** $2(x+3) - 5x = 8 + 3x$;
g) $2x(x+5) - 3(x-1) = x(2x-3) + 4$; **h)** $2x - 2 \cdot [2(x+1) - 3(x+5)] = 4(x-1) + 1$;
i) $2x(3x + 2) + 2(x + 1)(x - 1) = 8(x - 2)(x + 2) + 30$;
j) $(x + 1)(x - 3) - (x + 2)(x + 3) = x(x - 4) - (x + 2)^2$;
k) $3(x - 1)^2 - 4(x - 3)(x + 3) = 2(x - 1) - (x + 3)^2 - 3$;
l) $\frac{x+3}{3} - 1\frac{1}{2} = \frac{2x-3}{6}$; **m)** $\frac{2x-3}{4} - \frac{2x+1}{2} = \frac{2x-1}{6} + 1\frac{1}{3}$.

Test 38

1. Rezolvați în R ecuațiile: **a)** $\frac{2(2x+1)}{3} - \frac{4x-1}{2} = \frac{4x+1}{6} - \frac{5(1-x)}{12}$;
b) $\frac{(x+3)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} = \frac{2x^2+5}{15} + \frac{(x+3)(x-3)-7}{30}$; **c)** $\left[\left(\frac{x+1}{2} + \frac{x}{3}\right) \cdot 1\frac{1}{2} + 3x\right] \cdot 4 = \frac{8x-3}{2}$;
2.a) $\sqrt{2}(x-3) + 3\sqrt{2}(x+1) = 8\sqrt{2}$; **b)** $4\sqrt{3}(x + \sqrt{6}) - x(\sqrt{3} + 2) = 8\sqrt{2} - x$;
c) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot x - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \cdot x$;

d) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}x+\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{9-2\sqrt{14}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}x$.

3. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile: **a)** $|x|=5$; $|x-3|=2$; $|2x-5|=1$;

b) $||x-2|-1|=1$; $||x-5|-4|=3$; $||2x-3|-1|=2$; $||x^2+1|-3|=14$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(2x+1)^2+(1-2x)^2=0$; **b)** $|3x-1|+|9x^2-1|=0$;

c) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}=0$; **d)** $|2x-1|-3=x$; **e)** $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=0$.

Test 39

Probleme

1. Suma a două numere este 16. Aflați numerele, știind că dacă la numărul mai mic adăugăm 20, obținem triplul numărului mai mare.

2. Un număr este de 13 ori mai mare decât altul, iar diferența lor este 144. Aflați numerele.

3. Să se afle un număr știind că dacă din 75% din el scădem 0,625, obținem $\frac{3}{8}$.

4. Un stilou și un penar costă împreună 100 lei. Dacă prețul stiloului ar crește cu 10%, iar prețul penarului ar fi cu 10% mai mic, atunci cele două articole ar costa împreună 96,40 lei. Aflați prețul inițial al stiloului și penarului (stiloul costă mai puțin decât penarul).

5. Într-un bloc sunt 25 de apartamente cu două și trei camere. Știind că în acel bloc sunt 60 de camere, aflați câte apartamente sunt cu două camere și câte cu trei camere.

6. Suma dintre triplul unui număr natural și dublul altui număr natural, împărțită la 45 dă câtul 20 și restul 15. Raportul celor două numere este egal cu $\frac{35}{39}$. Aflați numerele.

A L G E B R Ă

CLASA a VIII-a

Numere reale. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Modulul unui număr real. Compararea şi ordonarea numerelor reale. Aproximarea numerelor reale

Test 40

1. Fie mulţimea: $A=\left\{5;\ -5;\ \frac{4}{3};\ -\frac{1}{2};\ 1,(3);\ 0,1(2);\ \sqrt{4};\ \sqrt{3};\ -1,3;\ \sqrt{2\frac{1}{4}};\ \sqrt{3}-\sqrt{2}\right\}$

Scrieţi elementele mulţimilor: $B = \{x \in A / \ x \in \mathbb{N}\}$; $C = \{x \in A / x \in \mathbb{Z}\}$; $D = \{x \in A / x \in \mathbb{Q}\}$; $E = \{x \in A / x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$; $F = \{x \in A / \ x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$.

2. Reprezentaţi pe axă, numerele: **a)** -2; 2,75; $-1,5$; 3,5; **b)** $-1; -\sqrt{5}; \sqrt{3}$; $\sqrt{2}; 2$; **c)** $\sqrt{7}; -2,5; -\sqrt{1,96}; \sqrt{6}; -\sqrt{8}; \sqrt{10}; \sqrt{12}; \sqrt{18}$.

3. Comparaţi numerele: **a)** $2\sqrt{5}$ şi $7\sqrt{2}$; **b)** $\frac{1}{3}$ şi $\frac{1}{5}$; **c)** 3^{-4} şi 81^{-1};

d) $1-\sqrt{2}$ şi $2-\sqrt{3}$; **e)** $\sqrt{39}$ cu 6,241; **f)** 9 cu $4\sqrt{5}$; **g)** 15,46 cu $\sqrt{239}$.

4. Calculaţi: **a)** rădăcina pătrată a numărului 72 cu aproximaţie de o zecime prin lipsă; **b)** $\sqrt{2,37}$ cu 2 zecimale exacte şi faceţi proba;

c) $3\sqrt{18}-\sqrt{98}-3\sqrt{32}+7\sqrt{2}$ cu aproximaţie de o zecime prin adaos.

5. Calculaţi:

a) $2\sqrt{2} : |-2| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$; **b)** $|-x| + \sqrt{(x-1)^2} + |2x| - |-3x|$, pentru $x = 2$;

c) $\sqrt{(-3)^2} + |1-\sqrt{3}| + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$; **d)** $|x-1| + |2-x| + |x|$, dacă $x > 2$.

Test 41

1. **a)** Determinaţi numerele de forma $\overline{1988abc}$ pătrate perfecte.

b) Arătaţi că $\sqrt{1995n+1997} \notin \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{1995n+1998} \notin \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2. Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor: **a)** $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$; **b)** $\frac{-3}{\sqrt{5}} \notin \mathbb{Q}$;

c) $-2,3(4) \in \mathbb{R}$; **d)** $\frac{4}{5}\sqrt{10} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **e)** $7-\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$; **f)** $0,(8)-\sqrt{9} \in \mathbb{R}$.

3. Fie mulțimea: $M = \left\{-3;\ -\pi;\ \sqrt{5};\ \frac{\sqrt{8}}{9};\ -3{,}14;\ 0;\ 0{,}75;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Să se calculeze: **a)** $M \cap \mathbb{Z}$; **b)** $M \cap \mathbb{Q}$; **c)** $M \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **d)** $M \cap \mathbb{R}$.

4. Ordonați crescător numerele: $-3{,}14; -\sqrt{10}; -\pi; -3{,}(2); -3{,}2(1)$.

5. Despre numărul real x știm că îndeplinește condițiile $\frac{123}{100} < x < \frac{124}{100}$

a) Care este prima cifră după virgulă a lui x?
b) Scrieți trei valori ale lui x pentru care propoziția dată este adevărată.

6. Calculați: **a)** $\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|-\left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right|$; **b)** $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{(5-3)^2}+3$;

c) $\left(2^{3003}-\left|2^{3003}-3^{2002}\right|\right):9^{1000}$; **d)** $3x-|x|+|2-3x|-\sqrt{x^2}+\left|-3x^2-2\right|-3\sqrt{x^4}$,

știind că $x<0$; **e)** $\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}-2$.

7. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuațiile: **a)** $|3x-2|=1$; **b)** $|3x+2|=5$; **c)** $(x-1)^2=4$.

INTERVALE DE NUMERE REALE
Proprietățile relației de inegalitate (ordine) în $\mathbb{R}$

Rețineți! Numărul real x este mai mare sau egal cu numărul real y dacă există numărul real z nenegativ ($z \geq 0$) astfel încât $x = y + z$.

1. Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ are loc una și numai una din relațiile: $x < y$, $x = y$, $y < x$.
2. $x \leq x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$; **3.** $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ **(tranzitivitatea)**;
4. $x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y$ **(antisimetria)**; **5.** $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, oricare ar fi $z \in \mathbb{R}$;
6. $x \leq y$ și $z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$; **7.** $x \leq y$ și $z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$;
8. $x \leq y$ și $z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$; **9.** $x \leq y$ și $z \leq t \Rightarrow xz \leq yt$, dacă $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+$.

Test 42

1. Scrieți sub formă de interval mulțimile și apoi reprezentați-le pe axa numerelor:
$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$;
$C = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 2\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1\}$; $E = \{x \in \mathbb{R} / x > 5\}$.

2. Scrieți ca intervale mulțimile:
$A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / x > 4\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \leq 1\}$;
$D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq \sqrt{2}\}$; $E = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \leq 0\}$; $F = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \geq 1\}$.

3. Stabiliți valoarea logică a propozițiilor:
a) $\{x \in \mathbb{R} / x < -2\} = (-\infty, -2)$; **b)** $\{x \in \mathbb{Z} / -1 < x < 1\} = (-1, 1)$;

c) $\{x \in \mathbb{R} / 1 \le x < 5\} = (1;5)$; **d)** $[0;2] = \{0,1,2\}$; **e)** $(-1;3) \subset (-5;5)$

f) $\{x \in \mathbb{Z} / x/3\} \subset [-3;3]$; **g)** $[-5;5] \supset \{-5;5\}$; **h)** $(-1;6) \not\subset [-2;5]$

4. Puneți în evidență pe axa numerelor, elementele mulțimilor:

$A = \{-2; 1; \sqrt{2}; 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \ge 3\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \setminus x < -2\}$;

$E = \{x \in \mathbb{R} \setminus -3 \le x < 1,5\}$; $F = \{x \in \mathbb{R} \setminus -\sqrt{3} \le x < \sqrt{3}\}$.

Operații cu numere reale

Test 43

1. Aplicând proprietățile operațiilor cu numere reale, efectuați:

a) $-2\sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 4)$; **b)** $-3\sqrt{2} - (-5\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1) + \sqrt{2}$; **c)** $13\sqrt{5} - 20\sqrt{5} + 8\sqrt{5}$;

d) $3 \cdot \left[-0,(3)\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$; **e)** $\left(-4,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{10}{11}\right) \cdot 121$; **f)** $144\sqrt{5} : (-36)$;

g) $(-357\sqrt{3}) : 3$; **h)** $\sqrt{12} - 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2} + \sqrt{24} - \sqrt{72} - 2\sqrt{3}$.

2. Fiind date numerele reale: $A = 16\sqrt{2} - 48\sqrt{3}$; $B = 32\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$ și $C = -8$, să se calculeze: **a)** $(A - B) \cdot C$; **b)** $(A + B) : C$; **c)** $(A + 2B) : (-2C)$; **d)** $(A + 2B + 3C) : (C : 4)$.

3. Dacă $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, arătați că $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

4. Să se demonstreze că următoarele numere sunt iraționale: **a)** $4\sqrt{5}$;

b) $-\frac{1}{3} + \sqrt{3}$; **c)** $\frac{1}{\sqrt{7}}$; **d)** $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$; **e)** $\pi - 3,14$.

Test 44

1. Calculați: **a)** $\left(\sqrt{3}\right)^2$; **b)** $\left(3\sqrt{2}\right)^2$; **c)** $\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2$; **d)** $\left(\sqrt{3}\right)^{-4}$; **e)** $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-4}$; **f)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$;

g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{125}$; **h)** $3\sqrt{18} : \sqrt{2}$; **i)** $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5}) - (\sqrt{18} - 5\sqrt{30}) : \sqrt{3}$;

j) $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5}) - (\sqrt{60} - \sqrt{40} + \sqrt{100}) : 2$.

2. Arătați că $\sqrt{75} - \sqrt{243} + \sqrt{300} = \sqrt{192} - \sqrt{507} + \sqrt{363}$.

3. Efectuați operațiile, raționalizând mai întâi numitorii:

a) $\frac{3}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{27}}$; **b)** $\frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{3}{\sqrt{32}} + \frac{5}{\sqrt{72}}$; **c)** $\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^{-2}$.

4. **a)** Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor: **i)** $a=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ și $b=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$; **ii)** $a=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

b) Verificați relațiile: $b\le m_a\le a;\ b\le m_g\le a;\ b\le m_g\le m_a\le a$.

Formule de calcul prescurtat

Reținеți!
Oricare ar fi numerele reale a, b și c avem:

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
4. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

Test 45

1. Calculați: **a)** $2x^3+2x-1-2x^2-3x+x^3-x^2+2$; **b)** $0{,}2a^2-1{,}2a^3+1{,}5+1{,}7a^5-0{,}3a^3+$ $+0{,}3a^5-1{,}3a^2-1$; **c)** $\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{3}xy^2+\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}xy^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x^2y$; **d)** $a\cdot(-a)\cdot$ $\cdot\left(-2a^2\right)+\sqrt{2}a\cdot 2a\cdot\left(-\sqrt{2}a^2\right)$; **e)** $\left(-a^2\right):\left(-\frac{1}{3}a\right)+\left(-\frac{4}{3}a^4\right):\left(-\frac{1}{3}a^3\right)$.

2. Fie $a=3x+2y-3$, $b=x+y+2$, $c=-2x-y-1$.
Calculați: **a)** $a+b+c$; **b)** $a-b-c$; **c)** $-a-b+2c$; **d)** $b-c-2$;
e) $2(a+b)-3(a+c)$; **f)** $2a-3b+4c$; **g)** $2\cdot(a-b)+3(a+c)-4(a-b+c-3)$.

3. Efectuați: **a)** $(x+3)^2$; $(x-5)^2$; $(2x+3y)^2$; $\left(\sqrt{2}x-1\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$; $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2$; $(-2x-1)^2$. **b)** $(x-2)(x+2)$; $(5-2x)(2x+5)$; $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$; $\left(a^3+b^3\right)\left(a^3-b^3\right)$; $(1{,}2-2a)(1{,}2+2a)$; $(x+y+1)(x-y+1)$. **c)** $(x+2)\left(x^2+2x+4\right)$; $(x-1)\left(x^2+x+1\right)$; $(2x+3y)\left(4x^2-6xy+9y^2\right)$; $(1-3x)\left(1+3x+9x^2\right)$.

4. Efectuați: **a)** $2(x+2+3y)-3(-x-2y+1)$; **b)** $-2(x+2y)-\left(x^2-2\right)(-1)-$ $-3(x^2-y+x)$; **c)** $2(x+2)(x-3)+3x(x-2)$; **d)** $(x^2-2x+1)(x-1)+2(x^3-3x^2-x+1)$;
e) $(x+5)^2-2(1-3x)^2$; **f)** $\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)+\left(x-\sqrt{2}\right)^2$;
g) $\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-1\right)+\left(x^2+x-1\right)^2$.

Test 46

1. Știind că $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y = -3$ și $xy = 2$, determinați: $x^2 + y^2$, $x - y$.

2. În ipoteza că există $a \in \mathbb{R}^*$ așa încât $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$, determinați: $a + \frac{1}{a}$, $a - \frac{1}{a}$ și $a^4 - \frac{1}{a^4}$.

3. Știind că $x^2 + 2y + 1 = 0$, determinați: $x^4 + 4y^2 + 4x^2y - 6x^2 - 12y + 9$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: **a)** $x^2 - 4x = 5$; **b)** $x^2 + 4x = 5$; **c)** $x^4 + 2x^2 = 24$; **d)** $y^4 - 6y^2 = 91$.

Descompunerea în factori
Test 47

1. Descompuneți în factori: **a)** $16x^3 - x$; **b)** $x^4 - 81$; **c)** $7x^2 - 1$; **d)** $(x^2 + 5x)^2 - 36$; **e)** $x^4 - (2x - 3)^2$; **f)** $(x + 3)^2 - 9x^2$; **g)** $(3x + 4y)^2 - (x - 2y)^2$; **h)** $z^2 - x^2 - 2xy - y^2$; **i)** $x^2 + y^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2xy$; **j)** $x^2 + a^2 - y^2 - b^2 + 2(ax - by)$.

2. Descompuneți în factori: **a)** $x^2 + 2x - 15$; **b)** $x^2 - x - 6$; **c)** $x^2 + 10x - 11$; **d)** $x^2 - 10x + 9$; **e)** $x^2 + x - 12$; **f)** $2x^2 + 5x - 3$; **g)** $12x^2 + 5x - 2$; **h)** $14x^2 + 5x - 1$; **i)** $x^2 + 8x - 20$; **j)** $x^3 - 7x + 6$; **k)** $x^4 - 5x^2 + 4$.

3. Descompuneți în factori: **a)** $x^3 + x^2 - 9x - 9$; **b)** $x^3 - x^2 - 9x + 9$; **c)** $x^3 - x^2 - x + 1$; **d)** $3x^3 - x^2 - 3x + 1$; **e)** $x^3 + x^2 - 4x - 4$; **f)** $x^3 + 3x^2 - 9x - 27$; **g)** $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2$; **h)** $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$; **i)** $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$; **j)** $x^3 - 5x^2 - 2x + 10$; **k)** $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$; **l)** $x^3 - 3x^2 - 3x + 9$; **m)** $x^3 + 5x^2 - 5x - 25$.

4. Descompuneți în factori: **a)** $6x + 3$; **b)** $2x - 4x^2$; **c)** $x(x + 2) - 3(x + 2)$; **d)** $2x(x - 2) - 3(2 - x)$; **e)** $x^2 - 64$; **f)** $4x^2 - 16$; **g)** $(x - 1)^2 - 9x^2$; **h)** $(3x - 2)^2 - (x + 1)^2$; **i)** $(x + 2)^2 - 4(x - 1)^2$; **j)** $2x^3 - 4x^2 + 2x$; **k)** $x^2 - y^2 - 4x + 4$; **l)** $x^2 - x - 12$; **m)** $x^8 - 1$; **n)** $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$; **o)** $x^4 - 4x^2 + 3$; **p)** $x^4 - 6x^2 + 5$.

Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea şi simplificarea rapoartelor

Test 48

1. Amplificaţi rapoartele: $\frac{1}{x}; \frac{x}{x+2}; \frac{x+2}{x-1}; \frac{x^2-1}{x^2+3}; \frac{x^2+x+1}{x^3-x-2}$ cu

a) 2; **b)** x; **c)** $x-1$; **d)** x^2-9; **e)** $x+1$; **f)** $x+2$; **g)** x^2-3; **h)** x^2-x+1.

2. Amplificaţi rapoartele de mai jos, obţinând rapoarte ce au acelaşi numitor (cel mai mic posibil): **a)** $\frac{1}{x}; \frac{2}{3x}; \frac{21}{2x^2}$; **b)** $\frac{x}{x+1}; \frac{x+1}{x-1}; \frac{5}{x^2-1}$;

c) $\frac{x+2}{x+3}; \frac{x+3}{x-3}; \frac{1-x}{x^2-9}$; **d)** $\frac{x-2}{x-3}; \frac{x-3}{x-2}; \frac{12}{x^2-5x+6}$.

3. Simplificaţi: **a)** $\frac{3x}{9x^2}$; **b)** $\frac{17a^2}{85a}$; **c)** $\frac{9x^3}{45x^9}$; **d)** $\frac{12ax}{36a^2}$; **e)** $\frac{14x^2y^3}{35x^3y^2}$.

4. Simplificaţi: **a)** $\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}$; **b)** $\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+2)^2}$; **c)** $\frac{(x-5)^2}{x^2-25}$;

d) $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$; **e)** $\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$; **f)** $\frac{2(x+1)}{(x+1)^2}$; **g)** $\frac{x^2-121}{2x+22}$; **h)** $\frac{5x-65}{x^2-169}$.

5. Simplificaţi: **a)** $\frac{x^2+x}{2x+2}$; **b)** $\frac{x^3-x}{5x+5}$; **c)** $\frac{2(x-1)^2}{x^2-1}$; **d)** $\frac{x^2-25}{x^2+10x+25}$;

e) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; **f)** $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$; **g)** $\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$; **h)** $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$;

i) $\frac{5x-35}{x^2-49}$; **j)** $\frac{x^2+7x+12}{x^2+8x+16}$; **k)** $\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$; **l)** $\frac{4x^2+4x+1}{2x^2-x-1}$.

Test 49

1. Amplificaţi raportul $\frac{x^2-x+1}{x+2}$ cu: $x-1$; $7x$; $2x-1$ şi x^2-2x+3.

2. Amplificaţi raportul $\frac{2x+1}{2x-5}$ şi $\frac{4x^2-3x+1}{9x^2-3x+1}$ astfel încât să obţineţi un raport care să aibă numitorii $4x^2-25$ şi respectiv $27x^3+1$.

3. Simplificați rapoartele de numere reale:

a) $\frac{x+3}{4x+12}$; b) $\frac{2x^2}{3x+x^2}$; c) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$; d) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$; e) $\frac{2x^2+3x-2}{2x^2-7x+3}$;

f) $\frac{x^3-y^3}{x^6-y^6}$; g) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}$; h) $\frac{x^4-5x^2+4}{5x^4+2x^2-7}$; i) $\frac{x^3-1}{x^3-x^2-x-2}$;

j) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^3+x^2-2x}$; k) $\frac{(x^2-3x+1)(x^2-3x+4)+2}{(x^2-3x+1)(x^2-3x+6)+6}$.

4. Simplificați rapoartele: a) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; b) $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$; c) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$;

d) $\frac{2x^2+3x-9}{5x^2+16x+3}$; e) $\frac{x^2+3x-10}{x^2-5x+6}$; f) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$; g) $\frac{4x^2-21x+5}{4x^2-19x-5}$;

h) $\frac{x^3-x^2-7x+7}{x^3+x^2-7x-7}$; i) $\frac{3x^3-x^2-3x+1}{3x^3+x^2-3x-1}$; j) $\frac{3x-y}{3ax-ay+3bx-by}$;

k) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-7x+6}$; l) $\frac{x^2-4y^2-4yz-z^2}{4y^2-x^2-2xz-z^2}$; m) $\frac{x^4-y^4}{x^3-y^3}$; n) $\frac{x^3-1}{x^4+x^2+1}$;

o) $\frac{(x^2-x+1)(x^2-x+9)+15}{(x^2-x+1)(x^2-x+6)+6}$; p) $\frac{(x^2+x-2)^2+5(x^2+x-2)+6}{x^4-x}$.

Operații cu rapoarte de numere reale

Test 50

1. Efectuați: a) $\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x-1}{x^2+1}$; b) $\frac{x^2(x^2-x)}{x^3+1}+\frac{x^2}{x^3+1}$;

c) $\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{xy+y^2}+\frac{3}{x+y}$; d) $\frac{2x+1}{4x^2+5x+1}+\frac{2x}{4x^2+5x+1}$;

e) $\frac{2x^2+3}{x^2-1}+\frac{2x}{1-x}$; f) $\frac{x-3}{x^2-2x}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{5x}$.

2. Efectuați: a) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x-1}{x+3}+\frac{x^2-33}{x^2-9}$; b) $\frac{x+2}{x^2-4x+2}+\frac{x+1}{x^2-x-6}$.

3. Efectuați: **a)** $2x-\frac{3-x}{4}$; **b)** $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}$; **c)** $\frac{2x^2}{x^3+8}-\frac{2x+1}{x^2-2x+4}$;

d) $\frac{1}{2\cdot(x+1)}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{6(x+1)}$; **e)** $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$.

4. Efectuați: **a)** $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$; **b)** $\frac{2x+5}{3x^2-6x}-\frac{x+1}{2x-4}+\frac{3x+1}{6x}$.

Test 51

1. Să se efectueze: **a)** $\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}$; **b)** $\frac{1}{x}+\frac{5}{2x}+\frac{3}{x^2}$; **c)** $\frac{4}{21x}-\frac{3}{7x}$;

d) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}$; **e)** $\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x-1}$; **f)** $\frac{3x^2}{x^2-4}-\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}$.

2. Să se efectueze: **a)** $\frac{2x}{9}\cdot\frac{3}{4x^2}$; **b)** $\frac{x-1}{2}\cdot 4$; **c)** $\frac{(x+1)^2}{2x}\cdot\frac{4}{x^2-1}$;

d) $\frac{4x^2}{x^2-9}:\frac{8x}{x+3}$; **e)** $\frac{18x}{x^2-1}:\frac{9x^3}{x-1}$; **f)** $\frac{x^2+2x+1}{x^2-25}:\frac{x^2+3x+2}{x^2+10x+25}$;

g) $\frac{x-1}{x^2-1}:\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}$; **h)** $\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3}:\frac{x^2-9}{x^2-1}$; **i)** $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}:\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

3. Să se efectueze: **a)** $\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6x}{15-2x}$; **b)** $\left(\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{3x-2}$;

c) $\frac{x^2+6x+9}{7x+7}:\left(\frac{3}{x-3}+\frac{4x-2}{x^2-9}\right)$; **d)** $\frac{x-1}{x-2}+\left(\frac{2}{x-4}+\frac{x+4}{x^2-16}\right):\frac{x+2}{x^2-4x}+\frac{5x-14}{x^2-4}$;

e) $\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}\cdot\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{3}{2x+1}\right):\frac{4\left(1-x^4\right)}{\left(4x^2-1\right)(x-1)^2}$.

4. Să se efectueze: **a)** $\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}:\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}-\frac{x^2+x-6}{x^2+6x+9}\right)\cdot\frac{10x}{x^2-4}$;

b) $\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2+8x+16}-\frac{x^2-3x-4}{x^2-8x+16}\right)\cdot\left(\frac{x+4}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$.

Test 52

1. Efectuați: **a)** $\frac{x-5}{x+3}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2-10x+25}$; **b)** $\frac{3x-3y}{15x^2-30xy+15y^2}\cdot\frac{5x-5y}{x^2+2xy+y^2}$.

2. Efectuați: **a)** $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2+3x-4}$; **b)** $\frac{x+1}{2x-4}\cdot\left[\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x+1}{3x-4}\cdot\left(\frac{4x-3}{x+1}-1\right)\right]$.

3. Efectuați: **a)** $\frac{x-1}{x+1}:\frac{x-2}{(x+1)^2}:\frac{x^2-1}{x-2}$; **b)** $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}:\frac{x^2+7x+10}{x^2-x-2}$.

4. Efectuați: **a)** $\frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2+3x-4}:\frac{x^2+4x-5}{x^2-2x-15}$;

b) $\left[\frac{2}{x-1}-\frac{x-2}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2-1}\right]:\frac{12x}{x^3+x^2-x-1}$;

c) $\left[-\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{2x}{x+2}+2\right]\cdot\frac{x^2+4x+4}{4x^2+12x+9}$; **d)** $\left(\frac{x+1}{x^2-2x}+\frac{x-1}{x^2+2x}\right):\frac{4x^2+8}{x^2-4}$.

Test 53

1. Se dă raportul: $F(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2+4x+3}$. **a)** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $F(x)$ este definită. **b)** Simplificați raportul. **c)** Calculați $F(2)$, $F(-1)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right)$, $F(3)$. **d)** Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $F(x)\in\mathbb{Z}$.

2. Se consideră expresia: $E(x)=\left[\left(\frac{2x-1}{x+1}-1\right)^2-\frac{2x-1}{x+1}+1\right]:\frac{6x-12}{x^2-3x-4}$.

a) Determinați numerele reale x pentru care expresia $E(x)$ are sens.
b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
c) Găsiți valorile întregi ale lui x pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$.

3. Fie $E(x)=\left(\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{2}{x+1}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2-2x+1}\right):\frac{4x^2}{x^4+x^3+x+1}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$. **b)** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ este definită. **c)** Arătați că pentru orice $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, are loc inegalitatea $E(x)<1$. **d)** Determinați mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,E(x)\in\mathbb{Z}\}$.

4. a) Arătați că forma cea mai simplă a expresiei:

$$E(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3-x}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}\right):\frac{10-x}{(x+1)(x^2-x+1)}-3\right] \text{ este } \frac{5-x}{x-3}.$$

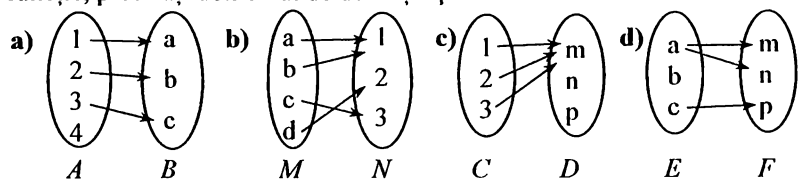
b) Determinați mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{N}/\ E(x)\in\mathbb{N}\}$; $B=\{x\in\mathbb{N}^*/\ E(x)\le 1\}$.

Funcții

Test 54

1. Fie $A=\{-1, 0, 1\}$ și $B=\{a, b\}$. Scrieți toate funcțiile definite pe A cu valori în B.

2. Identificați diagramele care definesc funcții apoi, pentru fiecare funcție, precizați domeniul de definiție și domeniul de valori.



3. Fie $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{0,1,2,3,4\}$ și funcția $f: A\to B$ descrisă de tabelul:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2	3	4

Desenați diagrama corespunzătoare tabelului și descrieți funcția printr-o formulă.

4. Fie $A=\left\{-2; 0; \frac{1}{2}; 1; \sqrt{2}\right\}$ și funcția $f: A\to B$, $f(x)=-2x+3$.

Determinați mulțimea valorilor funcției.

5. Determinați funcția f, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, știind că: **a)** $f(-1)=3$ și $f(2)=3$; **b)** $A(-2,4)$ și $B(1,1)$ sunt situate pe graficul funcției; **c)** $A(-1,3)$ este pe grafic și $f(-3)=4$.

Test 55

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

Calculați: $f(0), f(1), f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(-\sqrt{3}\right)$, $f(4)$, $f\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$.

2. Reprezentați grafic funcțiile următoare; în fiecare caz precizați punctele de intersecție a graficului cu axele de coordonate:

a) $f:\{-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{1}{4}x+3$; **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0{,}5x-\sqrt{2}$.

3. Pentru ce valori ale lui m, graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x+2m-1$ conține punctul $A(-1,3)$?

4. Determinați aria figurii mărginite de graficele funcțiilor

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-1$, și axa absciselor.

5. Determinați punctul de coordonate egale care se află pe reprezentarea graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-3$.

Test 56

1. Într-un sistem de coordonate carteziene se consideră punctele: $A(-1;1)$, $B(-2;-1)$, $C(-3;-3)$ și $D(2;6)$. **a)** Determinați funcția al cărei grafic are ca reprezentare geometrică dreapta AB. **b)** Stabiliți valoarea logică a fiecăreia dintre propozițiile: 1) $C\in AB$; 2) $D\in AB$.

2. Stabiliți dacă punctele $M(1,1)$, $N(2,-1)$ și $P(-1,5)$, situate în același sistem de coordonate sunt sau nu coliniare.

3. Se consideră funcțiile: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3}x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(-x)=-\sqrt{3}x+3$ și se notează cu G_f și respectiv G_g reprezentările geometrice ale graficelor lor. Determinați: **a)** măsura unghiului format de G_f cu axa absciselor și măsura unghiului format de G_g cu axa ordonatelor; **b)** măsura unghiului ascuțit format de G_f și G_g.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a-3)x-1$, unde a este parametru real. Stabiliți pentru ce valori ale lui a, graficul funcției conține un punct ale cărui coordonate sunt numere opuse și determinați aceste coordonate în funcție de a.

Ecuații de forma $ax+b=0$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$. Ecuații echivalente

Test 57

1. Se dă ecuația: $\frac{1}{x-1}+2=\frac{x-3}{x-1}$. Verificați care din numerele: $2,-1,\ 3,\ -2,\ 1,\ \frac{1}{2}$ este soluție pentru ecuație.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2x-2=7-3(x-2)$; **b)** $4x-(2x-3)(-1)=3$; **c)** $6(1-2x)-(3x-6)=\frac{1}{2}$;

d) $6(x-2)-2(x+2)=-4$; **e)** $\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{3}(3x-1)=1$; **f)** $\frac{x+1}{2}+\frac{1-2x}{4}=$

$=\frac{x-2}{8}$; **g)** $2-x-\frac{x+1}{3}=\frac{3-x}{4}$; **h)** $x(x-2)-(x+1)(x-1)=3x+4$;

i) $-3(x-4)+\frac{1}{2}=0{,}5x-\frac{1}{2}x$; **j)** $\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-\frac{1}{2}=1$; **k)** $x^2=4$; **l)** $x^2=-5$;

m) $|x-1|=2$; **n)** $2(x-3)-\sqrt{x^2-2x+1}=3x+1$; **o)** $|10x-20|+(x-2)^2=0$.

3. Rezolvați în R ecuațiile: **a)** $(x+2)^2+(x-3)(x+3)=2(x-1)^2+1$;
b) $(2-x)^2+3(x+5)(x-5)=4(x+1)^2+9$; **c)** $(2x-3)(x+1)-2(x-1)^2=$
$=(4x-3)(4x+3)-(4x+1)^2$; **d)** $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=(4x-5)^2-$
$-(3x-1)^2-(2x+1)^2+13$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x^2+x-3)^2+(2x-1)^2=(4x-1)(4x+1)+x^2(x+1)^2-18x(x-2)-35$;

b) $4(\sqrt{2}-1)x-28=3\cdot(\sqrt{2}+1)x-4\sqrt{2}$; **c)** $\sqrt{5}(3x+1)+70=3(x+\sqrt{5})\cdot\sqrt{125}$;

d) $8\cdot\{7x-6\cdot[5x-4\cdot(3x-2)]+1\}+2=9(x+1)$; **e)** $x+\frac{2x-3}{3}-\frac{3x-2}{4}=2-\frac{x+1}{2}$;

f) $\frac{3(x+2)}{5}+\frac{3(2x-3)}{10}=\frac{5x}{6}+\frac{5}{2}$; **g)** $\frac{3-x}{4-x}=3+\frac{1}{4-x}$; **h)** $\frac{2x+3}{x-1}=\frac{5}{x-1}+8\cdot$

Sisteme de ecuații

Fie sistemul: $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ unde $a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{R}$. Dacă $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, atunci sistemul are o infinitate de soluții. Dacă $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$, atunci $S=\phi$. Dacă $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$, atunci sistemul are soluție unică.

Test 58

1. Stabiliți care din următoarele perechi de numere sunt soluții ale ecuației $x-2y+3=0$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(1;2)$; $(-2;-1)$.

2. Desenați dreapta soluțiilor pentru fiecare din ecuațiile: **a)** $x-2y+3=0$; **b)** $-2x+y-4=0$; **c)** $2x-3y+1=0$.

3. Rezolvați prin metoda grafică sistemele de ecuații:

$\begin{cases} x-2y=6 \\ 2x-y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+y=4 \end{cases}$; $\begin{cases} -2x+3y=5 \\ 3x+y=9 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x-5y=23 \\ 2x-3y=13 \end{cases}$.

4. Rezolvați prin metoda substituției și prin metoda reducerii sistemele:

$\begin{cases} 3x+10y=13 \\ 5x+y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 4x+3y=19 \end{cases}$; $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=2 \\ -0,(5)x+y=-6\frac{2}{9} \end{cases}$.

Test 59

1. Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x=1; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+y=9 \\ 2x-3y=6; \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x-5y=33 \\ x-y=7; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 5x+y=7; \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 0,2x+1,2y=15,2 \\ 0,6x+0,1y=8,2; \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 0,(3)x+0,(2)y=4 \\ 0,(6)x-0,(5)y=-1. \end{cases}$

2. **a)** $\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{1}{6}y=18 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=21; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=7 \\ \frac{x}{2}=\frac{y}{5}; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x-7y=11 \\ \frac{x}{2}=\frac{y}{7}; \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 0,1x+y=1,05 \\ 1,2x-4y=2,1. \end{cases}$

3. **a)** $\begin{cases} x+y=7 \\ 4x+3y=24; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y+3}{3}=\frac{x-1}{6} \\ x+y=1; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \frac{x+3}{4}-\frac{y-1}{5}=2\frac{3}{5} \\ 2x-3y=16; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y+3}{3}=\frac{x}{6}-\frac{1}{6} \\ x+y=-2; \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} \frac{1}{x}+8y=0 \\ \frac{6}{x}+25y=1; \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=0 \\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=2\frac{1}{4}. \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}-\dfrac{2y-5x}{3}=-\dfrac{4}{9} \\ (x-5)^2-(4-y)^2=(x-y)(x+y)-2; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=9 \\ 4\sqrt{2}x-7\sqrt{3}y=-13; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}+\dfrac{y-2}{3}=2 \\ 2(x+y-1)+y^2=(y-1)(y+1)+1; \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5 \\ 5\sqrt{2}x-2\sqrt{3}y=4. \end{cases}$

PROBLEME

Test 60

1. Diferența a două numere este 40. Aflați numerele știind că unul este de 2 ori mai mare decât celălalt.

2. Aflați trei numere știind că suma lor este 450, primul este de două ori mai mare decât al doilea, iar diferența dintre al doilea și al treilea este 50.

3. La un magazin s-a vândut unui cumpărător 0,3 dintr-o bucată de stofă, altui cumpărător $\frac{1}{2}$ din rest și mai rămân 14 m. Câți metri a avut bucata?

4. Aflați două numere știind că diferența lor este 40 și împărțind pe cel mare la cel mic, obținem câtul 2 și restul 3.

5. Diferența a două numere este 400, iar raportul lor este $\frac{3}{5}$. Aflați numerele.

Test 61

1. $\frac{1}{5}$ dintr-un număr este cât $\frac{1}{2}$ din altul. Aflați numerele știind că au media aritmetică 140.

2. Să se afle două numere naturale, știind că cel mai mare divizor comun al lor este 13, iar diferența pătratelor lor este 1183.

3. Numitorul unei fracții este de 9 ori mai mare decât numărătorul său. Dacă se mărește numărătorul cu 10 și se micșorează numitorul cu 8, se obține $\frac{1}{2}$. Care este fracția?

4. Două magazine au vândut împreună într-o zi marfă în valoare de 10 milioane lei. Dacă primul ar fi încasat cu 15% mai mult, iar cel de-al doilea cu 10% mai mult, atunci suma încasată de ambele magazine ar fi fost de 11,2 milioane lei. Ce sumă s-a încasat de fiecare magazin?

5. 3 stilouri și 4 cărți costă 120 lei. 7 stilouri și 3 cărți costă 185 lei. Cât costă un stilou și cât costă o carte?

Inecuații. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\geq$, $<$, $\leq$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

Probleme

Test 62

1. Rezolvați în $\boldsymbol{R}$ inecuațiile:

a) $6x+5 \leq 2x+3$; **b)** $3(2-x)+1 < 5x+3$; **c)** $(x+1)(x-2) \leq (x+2)^2+4$;

d) $-2(2x+1)+2 > -(x+2)\cdot(-7)+3$; **e)** $-x(x+2) \geq -x(x+1)$;

f) $2x+3 \leq 2(x+1)+4$; **g)** $\frac{x+1}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{x+2}{6}$; **h)** $-\frac{x+1}{3} + 1{,}5 < -0{,}2x$.

2. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{R} / 2x+3 > 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} / 5(x+1)+3 \leq 2(x+1)\}$;

$C = \{x \in \mathbb{Z}^* / -2(x-3)-4 \geq -(-x+6)\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| > 1\}$;

$E = \left\{x \in \mathbb{N} / \left|\frac{x-3}{2}\right| \leq 2\right\}$; $F = \{x \in \mathbb{R} / \left||x^2-1| + |x^2+4x+3| + |x^2-x-2|\right| \leq 0\}$.

3. Aflați numărul întreg x știind că numerele $2x-3$, $x-1$ și 8 reprezintă lungimile laturilor unui triunghi exprimate în metri.

4. La un concurs un elev trebuie să răspundă la 50 de întrebări. Pentru un răspuns corect obține 10 puncte, iar pentru un răspuns greșit, pierde 4 puncte. Aflați la câte întrebări trebuie să răspundă corect elevul pentru a obține un punctaj mai mare de 140 de puncte.

GEOMETRIE

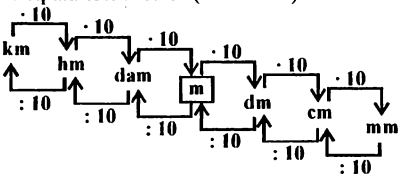
CLASA a VI-a

Măsurare şi măsuri

Reţineţi!

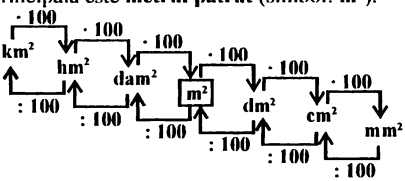
➲ **Lungime:**

➢Unitatea principală este **metrul** (simbol: **m**).



➲ **Arie:**

➢Unitatea principală este **metrul pătrat** (simbol: m^2).

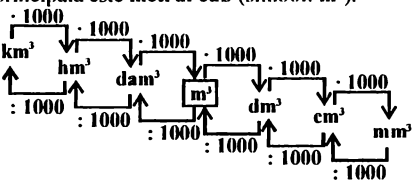


➢Unităţi agrare:

- ar (simbol **a**); 1 a = 100 m^2;
- hectar (simbol **ha**); 1 ha = 100 a = 10000 m^2.

➲ **Volum:**

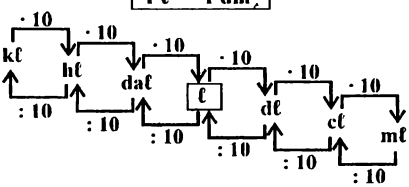
➢Unitatea principală este **metrul cub** (simbol: m^3).



➲ **Capacitate** (Capacitatea unui recipient este volumul din interior al acestuia).

➢Unitatea principală este **litrul** (simbol: **ℓ**).

1 ℓ = 1 dm^3



➲ **Unghi**

➢Unitatea principală este **gradul sexagesimal** (simbol: °).

Submultipli:

– unghiul de 1 minut (simbol: **1'**);

$1° = 60'$

– unghiul de 1 secundă (simbol: **1"**);

$1' = 60"$

$1° = 60' = 60 \cdot 60" = 3600"$.

Exerciţii rezolvate:

1. a) 12,356 dam = ? dm; **b)** 3,56 cm = ? dam; **c)** 103,42 m = ? hm.

Rezolvare:

a) 1 dam = 100 dm, deci 12,356 dam = (12,356 · 100) dm = 1235,6 dm;

b) 1 cm = (1 : 1000) dam, deci 3,56 cm = (3,56 : 1000) dam = 0,00356 dam;

c) 1 m = (1 : 100) hm, deci 103,42 m = (103,42 : 100) hm = 1,0342 hm.

2. a) 0,326 m^2 = ? dm^2; **b)** 2,034 dam^2 = ? dm^2; **c)** 209,4 cm^2 = ? m^2;
d) 3,5 ha = ? a; **e)** 1230 a = ? ha; **f)** 19500 m^2 = ? ha.

Rezolvare:

a) 1 m^2 = 100 dm^2, deci 0,326 m^2 = (0,326 · 100) dm^2 = 32,6 dm^2;

b) 1 dam^2 = 10000 dm^2, deci 2,034 dam^2 = (2,034 · 10000) dm^2 = 20340dm^2;

c) 1 cm^2 = (1 : 10000) m^2, deci 209,4 cm^2 = (209,4 : 10000) m^2 = 0,02094 m^2;

d) 3,5 ha = (3,5 · 100) a = 350 a; **e)** 1230 a = (1230 : 100) ha = 12,3 ha;

f) 19500 m^2 = (19500 : 10000) ha = 1,95 ha.

3. a) 4,0203 dm^3 = ? cm^3; **b)** 2,0452 dam^3 = ? dm^3; **c)** 256000 cm^3 = ? m^3;
d) 256 hl = ? m^3; **e)** 4,52 dam^3 = ? kl.

Rezolvare:

a) 1 dm^3 = 1000 cm^3, deci 4,0203 dm^3 = (4,0203 · 1000) cm^3 = 4020,3 cm^3;

b) 1 dam^3 = 10^6 dm^3, deci 2,0452 dam^3 = (2,0452 · 10^6) dm^3 = 2045200 dm^3;

c) 256000 cm^3 = (256000 : 10^6) m^3 = 0,256 m^3;

d) 256 hl = (256 · 100) l = 25600 dm^3 = (25600 : 1000) m^3 = 25,6 m^3;

e) 4,52 dam^3 = (4,52 · 10^6) dm^3 = 4520000 dm^3 = 4520000 l = (4520000 : 1000) kl = 4520 kl.

4. a) Transformaţi în secunde: 12°35'47".

b) Transformaţi în expresii de tipul „grade, minute, secunde": **i)** 92452"; **ii)** 20,24°;

c) Transformaţi în minute: 2°48";

d) Transformaţi în grade: 426'54".

Rezolvare:

a) 12°35'47" = 12° + 35' + 47" = 12 · 3600" + 35 · 60" + 47" = 45347";

b) i) 92452" = 25 · 3600" + 2452" = 25 · 1° + 40 · 60" + 52" = 25° + 40 · 1' + 52" =
= 25° + 40' + 52" = 25°40'52";

ii) 20,24° = 20° + 0,24° = 20° + (0,24 · 60)' = 20° + 14,4' = 20° + 14' + 0,4' =
= 20° + 14' + 0,4 · 60" = 20° + 14' + 24" = 20°14'24";

c) $2°48" = 2° + 48" = 2 \cdot 60' + \left(\frac{48}{60}\right)' = 120' + 0{,}8' = 120{,}8'$;

d) $426'54" = 426' + 54" = 7 \cdot 60' + 6' + 54" = 7 \cdot 1° + \left(\frac{6}{60}\right)° + \left(\frac{54}{3600}\right)' =$

$= 7° + 0{,}1° + 0{,}015° = 7{,}115°$.

Test 63

Completați spațiile punctate:

1. a) 2 hm + 15 dm + 9 m = ... dam; **b)** 1250 dm + 3,2 dam + $3\frac{3}{5}$ m = ... hm.

2. a) 60 dm^2 + 2,5 dam^2 – 1200 cm^2 = ... m^2;

b) $2\frac{3}{4}$ m^2 + 23500 mm^2 + 0,00032 dam^2 = ... dm^2;

c) 4,2 ha – 9620 m^2 = ... a.

3. a) 3,5 dam^3 + 2 km^3 + 2500 m^3 = ... hm^3; **b)** $3\frac{2}{5}$ m^3 + 0,000256 hm^3 = ... dam^3;

c) 0,27 m^3 – 2,563 hl = ... dl.

4. a) i) 8456" = ...°...'..."; **ii)** 3°45'36" = ...' = ...";

b) Efectuați, exprimând rezultatele sub forma $x°y'z"$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$, $y, z < 60$:

i) 87°47'58" + 45°56'54"; **ii)** 73°40'12" – 29°53'49"; **iii)** 180° - 75°47'.

Punctul, dreapta, planul, semidreapta, segmentul de dreaptă, unghiul

Test 64

1. Se consideră cinci puncte distincte în plan. **a)** Care este numărul maxim de drepte determinate de câte două din aceste puncte?
b) Există poziții ale celor 5 puncte astfel încât să fie determinate exact: **1)** 4 drepte; **2)** 5 drepte; **3)** 6 drepte; **4)** 8 drepte?

2. Se consideră punctele coliniare *A, B, M, C, D* în această ordine, astfel încât $BC = 2$ cm și M este mijlocul segmentului $[BC]$. Să se afle: **a)** AB știind că $AC = 2\,BD$ și $AD = 10$ cm; **b)** AD, dacă $AB = 2CD$ și $AC = 1{,}5\,BD$; **c)** AD știind că AB și CD sunt direct proporționale cu 3 și 4 iar MA și MD sunt invers proporționale cu 5 și 4.

3. a) Ce măsură are: **1)** suplementul unghiului cu măsura de 99° 32′ 45″; **2)** complementul suplementului unghiului cu măsura de 142° 28′ ? **b)** Calculați măsurile a două unghiuri: **1)** suplementare, știind că ele sunt direct proporționale cu 7 și 8; **2)** complementare, știind că diferența lor este egală cu $\frac{1}{5}$ din suplementul celui mai mic.

4. Semidreptele $[OZ$ şi $[OT$ sunt interioare unghiului XOY. Dacă $m(\sphericalangle XOY)=120°$ şi $m(\sphericalangle XOT) = m(\sphericalangle YOZ) = 80°$. Arătaţi că bisectoarele unghiurilor XOY şi ZOT coincid.

Congruenţa triunghiurilor

Reţineţi!

➲ Două triunghiuri sunt congruente dacă au laturile respectiv congruente şi laturilor congruente li se opun unghiuri congruente în cele două triunghiuri.

Cazul de congruenţă L.U.L. Două triunghiuri sunt congruente dacă au câte două laturi şi unghiul cuprins între ele respectiv, congruente.

Cazul de congruenţă U.L.U. Două triunghiuri sunt congruente dacă au câte o latură şi unghiurile alăturate ei respectiv, congruente.

Cazul de congruenţă L.L.L. Două triunghiuri sunt congruente dacă au laturile respectiv, congruente.

Test 65

1. Segmentele AB, CD şi MN au acelaşi mijloc O. Ştiind că $A \notin CD$ şi $M \in (OC)$, demonstraţi că $\Delta BMC \equiv \Delta AND$.

2. Se consideră un segment AB şi punctele A', B', situate de o parte şi de alta a dreptei AB astfel încât $\sphericalangle A'AB \equiv \sphericalangle B'BA$ şi $[AA'] \equiv [BB']$. Dacă M este mijlocul segmentului AB, demonstraţi că:
a) $[A'M] \equiv [B'M]$; **b)** punctele A', M, B' sunt coliniare.

3. Pe latura $(OX$ a unui unghi propriu XOY se consideră punctele A şi B $(A \in (OB))$ iar pe latura $(OY$ punctele C şi D astfel încât $[OC] \equiv [OA]$ şi $[OD] \equiv [OB]$. Dreptele AD şi BC se intersectează în I. Demonstraţi că:
a) $[BC] \equiv [AD]$; **b)** $\Delta AIB \equiv \Delta CID$; **c)** $(OI$ este bisectoarea unghiului XOY.

4. Fie A, B, C, D puncte coliniare în această ordine. Pe mediatoarea segmentului BC se consideră un punct E $(E \notin BC)$. Fie $(BB'$, $(CC'$ bisectoarele unghiurilor ABE şi DCE, respectiv $(B' \in AE$, $C' \in DE)$. Ştiind că $[BB'] \equiv [CC']$, demonstraţi că segmentele BC şi AD au acelaşi mijloc.

Perpendicularitate. Cazurile de congruență pentru triunghiurile dreptunghice. Mediatoarea unui segment. Concurența mediatoarelor și a bisectoarelor într-un triunghi

Rețineți!

Cazul de congruență C.C. Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au catetele, respectiv congruente.

Cazul de congruență C.U. Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au o catetă și un unghi ascuțit, la fel așezat față de catetă, respectiv congruente.

Cazul de congruență I.C. Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au ipotenuza și o catetă, respectiv congruente.

Cazul de congruență I.U. Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au ipotenuza și un unghi ascuțit, respectiv congruente.

➲ Un punct aparține bisectoarei unui unghi dacă și numai dacă este egal depărtat de laturile unghiului.

➲ Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor unui triunghi este centrul *cercului înscris* în triunghi.

➲ Un punct aparține mediatoarei unui segment dacă și numai dacă este egal depărtat de extremitățile segmentului.

➲ Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție al mediatoarelor unui triunghi este centrul *cercului circumscris* triunghiului.

➲ Într-un triunghi dreptunghic lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătatea ipotenuzei.

➲ Într-un triunghi dreptunghic, cateta ce se opune unui unghi cu măsura de 30° are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Test 66

1. Fie unghiul AOB cu măsura de 54°, $(OA'$ și $(OB'$ semidreptele opuse semidreptelor $(OA$ și $(OB$; $(OC$, $(OD$ și $(OE$ bisectoarele unghiurilor AOB, BOA' și respectiv $A'OB'$ și punctul M, situat în semiplanul opus semiplanului deschis determinat de dreapta OA și punctul B, astfel încât $OM \perp OB$. Determinați: **a)** $m(\sphericalangle COD)$; **b)** $m(\sphericalangle EOC)$; **c)** $m(\sphericalangle MOA)$; **d)** $m(\sphericalangle MOA')$; **e)** $m(\sphericalangle MOD)$.

2. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ în care construim $AD \perp BC$ $(D \in BC)$, $A'D' \perp B'C'$ $(D' \in B'C')$ și punctele M și M' mijloacele laturilor BC și respectiv $B'C'$. Dacă $(BC) \equiv (B'C')$; $(AD) \equiv (A'D')$ și $(AM) \equiv (A'M')$, triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente ?

3. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC. Mediatoarea laturii $[AC]$ intersectează latura $[BC]$ în punctul P. Aflați perimetrul triunghiului ABP știind că $BC=20$ cm și $AB=15$ cm.

4. Fie unghiul AOB și punctele M și N pe laturile $(OA$, respectiv $(OB$ astfel încât $B \in (ON)$ și $A \in (OM)$. **a)** Dacă P este un punct situat în

interiorul unghiului AOB astfel încât $\sphericalangle PBA \equiv \sphericalangle PBN$ şi $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PAM$, arătaţi că punctul P este egal depărtat de dreptele OA, OB şi AB. **b)** Arătaţi că (OP este bisectoarea unghiului AOB.

Drepte paralele. Suma unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi

Reţineţi!

➲ Două drepte a şi b situate în planul P se numesc paralele dacă nu au nici un punct comun. Se notează $a \parallel b \Leftrightarrow a \cap b = \phi$.

Printr-un punct A exterior unei drepte d, trece o singură dreaptă paralelă cu d.

➲ O dreaptă se numeşte **secantă (sau transversală)** pentru două sau mai multe drepte, dacă intersectează fiecare din aceste drepte în puncte distincte.

➲ Dacă pentru două drepte distincte există o secantă cu care formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele şi reciproc: două drepte paralele formează cu orice secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente. (***Teorema paralelelor intersectate de o secantă***).

➲ Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente dacă sunt ambele ascuţite sau ambele obtuze şi sunt suplementare dacă unul este ascuţit, iar celălalt obtuz.

➲ Două drepte paralele cu a treia sunt paralele între ele.

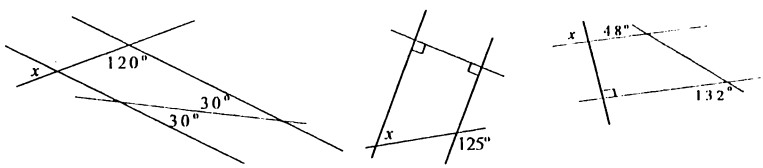
➲ Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°.

➲ Un unghi se numeşte **unghi exterior** unui triunghi dacă este adiacent cu unul din unghiurile triunghiului şi suplementar cu el.

➲ Măsura unghiului exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el. (***Teorema unghiului exterior***)

Test 67

1. Determinaţi măsurile unghiurilor notate cu x din figurile de mai jos:



a) **b)** **c)**

Fig. 1

2. Se consideră ΔDEF cu $m(\sphericalangle DEF)=70°$. Fie A piciorul bisectoarei $\sphericalangle DEF$, B intersecţia dreptei DE cu mediatoarea segmentului EA şi BC bisectoarea $\sphericalangle ABD$, $C \in AD$. **a)** Determinaţi $m(\sphericalangle EBA)$. **b)** Arătaţi că $AB \parallel EF$ şi $BC \parallel AE$.

3. Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi ştiind că măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului sunt direct proporţionale cu numerele 5, 6, 7.

4. Bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C ale unui triunghi ABC se intersectează în I iar bisectoarele exterioare ale aceloraşi unghiuri, în J. Exprimaţi măsurile unghiurilor BIC şi BJC în funcţie de măsura unghiului BAC.

5. Fie un triunghi ABC şi un punct $D\in(BA$ astfel încât $[AD]\equiv[AC]$. Demonstraţi că dreapta CD este paralelă cu bisectoarea unghiului BAC.

6. Se consideră o dreaptă a şi două puncte distincte A şi B exterioare ei. Demonstraţi că: **a)** Dacă dreapta a conţine mijlocul M al segmentului AB, atunci punctele A şi B sunt egal depărtate de a; **b)** Dacă $AB \parallel a$, atunci distanţele de la punctele A şi B la dreapta a sunt egale; **c)** Dacă punctele A şi B sunt situate la distanţe egale faţă de dreapta a, atunci aceasta conţine mijlocul segmentului AB sau este paralelă cu AB.

Test 68

1. Într-un triunghi ABC cu $m(\sphericalangle BAC)=75°$ şi $m(\sphericalangle ACB)=45°$ se consideră înălţimea $[AD]$ şi bisectoarea interioară $[BB']$ care se intersectează în M. **a)** Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului $B'AM$. **b)** Stabiliţi valoarea logică a propoziţiei: $DC=3DM$.

2. Fie ABC un triunghi echilateral şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$ astfel încât $[AM]\equiv[BN]$. Dacă $\{P\}=AN\cap CM$, determinaţi $m(\sphericalangle NPC)$.

3. a) Determinaţi măsurile unghiurilor unui triunghi ABC ştiind că $m(\sphericalangle A)$ şi $m(\sphericalangle C)$ sunt invers proporţionale cu numerele 0,1 şi 0,05 iar $m(\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle C)$ sunt direct proporţionale cu numerele 3 şi 4.

b) Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu numerele a, b şi $a+b$. Determinaţi aceste măsuri ştiind că $\frac{a}{b}=0,0(6)$.

4. În triunghiul ascuţitunghic ABC cu măsura unghiului B mai mare decât măsura unghiului C cu 32°, se construiesc înălţimea $[AD]$ şi bisectoarea $[AE]$. Ştiind că măsurile unghiurilor BAD şi DAE sunt direct proporţionale cu numerele 1 şi 2, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

5. Fie $[BE]$ şi $[CF]$ mediane într-un triunghi ABC şi punctele $M\in(BE$ şi $N\in(CF$ astfel încât $[EM]\equiv[BE]$, $M\neq E$ şi $[FN]\equiv[CF]$, $N\neq F$. Punctele M, A, N sunt coliniare? Justificare.

6. Se prelungeşte mediana $[BE]$ a unui triunghi ABC cu un segment EM astfel încât $[EM]\equiv[BE]$. Pe semidreapta opusă semidreptei $[AM$ se consideră punctul N încât $[AN]\equiv[AM]$. Demonstraţi că $NB\parallel AC$.

Triunghiul isoscel. Triunghiul echilateral. Proprietăți. Concurența înălțimilor și a medianelor unui triunghi

Reținеți!

➲ Un triunghi se numește isoscel dacă are două laturi congruente.

➲ Un triunghi este isoscel, dacă și numai dacă are două unghiuri congruente.

➲ Un triunghi este isoscel, dacă și numai dacă bisectoarea unui unghi al acestuia este și înălțime.

Observații.

1. Dacă înlocuim bisectoarea unui unghi cu „o mediană" sau cu „o mediatoare", obținem propoziții adevărate.

2. Dacă înlocuim cuvântul „înălțime" cu „mediană" sau cu „mediatoare", obținem propoziții adevărate.

➲ Într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului opus bazei este **axă de simetrie** a triunghiului.

➲ Un triunghi se numește **echilateral** dacă are toate laturile congruente.

➲ Unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente și reciproc, dacă unghiurile unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este echilateral.

➲ Într-un triunghi echilateral bisectoarea oricărui unghi este: mediană, înălțime și mediatoare.

➲ Înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție al înălțimilor unui triunghi se numește **ortocentrul triunghiului.**

➲ Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție al medianelor se numește **centrul de greutate al triunghiului** și el determină cu mijlocul fiecărei laturi un segment a cărui lungime este $\frac{1}{2}$ din lungimea segmentului pe care-l determină cu vârful opus laturii respective.

Test 69

1. Demonstrați că: **a)** într-un triunghi isoscel mediana corespunzătoare bazei este și bisectoare, înălțime, mediatoare; **b)** dacă o înălțime a unui triunghi este și bisectoare atunci triunghiul este isoscel; **c)** dacă o mediană a unui triunghi este și înălțime, atunci triunghiul este isoscel; **d)** dacă o mediană a unui triunghi este și bisectoare, atunci triunghiul este isoscel.

2. Demonstrați că în orice triunghi isoscel: **a)** medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente; **b)** bisectoarele unghiurilor alăturate bazei sunt congruente.

3. Pe laturile (AB) și (AC) ale unui triunghi isoscel ABC cu baza $[BC]$ se consideră respectiv, punctele D și E astfel încât $[BD] \equiv [CE]$ și se notează cu F intersecția dreptelor BE și CD. Demonstrați că:
a) $[BE] \equiv [CD]$; **b)** AF este mediatoarea segmentului DE.

4. Fie N și P mijloacele laturilor $[AC]$ și, respectiv, $[AB]$ ale unui triunghi isoscel ABC de bază $[BC]$, cu $m(\sphericalangle BAC) \neq 90°$. Perpendiculara în A pe AC intersectează dreapta CP în D iar perpendiculara în A pe AB intersectează dreapta BN în E. Demonstrați că $[BD] \equiv [CE]$.

Test 70

1. Se consideră un triunghi ABC cu $[AB] \equiv [AC]$. Perpendiculara în B pe AB se intersectează cu perpendiculara în C pe AC în punctul D. **a)** Demonstrați că (AD este bisectoarea unghiului BAC. **b)** Perpendiculara în A pe AD intersectează dreptele DB și DC respectiv în E și F. Demonstrați că $[BE] \equiv [CF]$.

2. Fie un triunghi ABC cu $[AB] \equiv [AC]$. Perpendiculara în B pe AB intersectează perpendiculara în C pe BC în punctul E, iar perpendiculara în C pe AC intersectează perpendiculara în B pe BC în punctul D. Fie M și N mijloacele segmentelor AB și respectiv AC, iar $F \in BE \cap CD$. Demonstrați că: **a)** $[BE] \equiv [CD]$; **b)** $[DM] \equiv [EN]$; **c)** $AF \perp BC$.

3. Se consideră un triunghi isoscel ABC de bază $[BC]$ și cu $m(\sphericalangle BAC) \neq 90°$. Perpendiculara în A pe AC se intersectează cu perpendiculara în B pe AB în punctul D, iar perpendiculara în A pe AB se intersectează cu perpendiculara în C pe AC în punctul E. Dacă $BD \cap CE = \{F\}$, demonstrați că: **a)** $[BD] \equiv [CE]$; **b)** $AF \perp DE$.

4. Perpendicularele în A pe laturile congruente AB și AC ale unui triunghi isoscel ABC cu $m(\sphericalangle BAC) < 90°$ intersectează dreapta BC în punctele N și respectiv M. Fie (BP bisectoarea unghiului ABM, $P \in AM$ și (CQ bisectoarea unghiului ACN, $Q \in AN$. Dacă $PB \cap QC = \{S\}$ și $QB \cap PC = \{T\}$, arătați că: **a)** $[PC] \equiv [BQ]$; **b)** ΔSBC este isoscel; **c)** punctele A, T, S sunt coliniare.

Test 71

1. Se consideră un triunghi echilateral ABC și punctele $D \in (AB)$, $E \in (BC)$, $F \in (CA)$ astfel ca $[AD] \equiv [BE] \equiv [CF]$. Demonstrați că:
a) triunghiul DEF este echilateral; **b)** $[AE] \equiv [BF] \equiv [CD]$.

2. Un triunghi ABC este echilateral. Perpendiculara în punctul A pe dreapta AB intersectează dreapta BC în M, perpendiculara în punctul B pe dreapta BC intersectează dreapta AC în N, iar perpendiculara în punctul C pe dreapta AC intersectează dreapta AB în P. Stabiliți dacă triunghiul MNP este echilateral.

3. Pe laturile congruente $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului isoscel ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale DAB și respectiv EAC. Perpendiculara din punctul D pe dreapta AB intersectează dreapta BC în M iar perpendiculara din E pe AC intersectează dreapta BC în N.
Demonstrați că: **a)** $[BE] \equiv [CD]$; **b)** $[BM] \equiv [CN]$.

4. În triunghiul echilateral ABC se consideră înălțimile $[AM]$, $[BN]$ și $[CP]$ și se notează cu D intersecția dreptei AM cu perpendiculara în punctul C pe dreapta AC, cu E intersecția dreptei BN cu perpendiculara în punctul A pe dreapta AB și cu F intersecția dreptei CP cu perpendiculara în punctul B pe dreapta BC.

a) Demonstrați că $[AE]\equiv[BF]\equiv[CD]$.

b) Stabiliți dacă triunghiul DEF este echilateral.

Test 72

1. Fie (AD bisectoarea unghiului BAC al unui triunghi ABC ($D\in BC$), $DE \parallel AB$, $E \in AC$ și $EF \parallel AD$, $F \in BC$. Demonstrați că: **a)** triunghiul ADE este isoscel; **b)** (EF este bisectoarea unghiului DEC.

2. Bisectoarele unghiurilor B și C ale unui triunghi ABC se intersectează în I. Paralela prin I la BC intersectează dreptele AB și AC în punctele D și respectiv E. Demonstrați că:
a) $DE = BD + CE$; **b)** $[DI] \equiv [EI]$ dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

3. Fie un triunghi ABC cu $[AB]\neq[AC]$. Paralela prin punctul B la dreapta AC intersectează paralela prin punctul C la dreapta AB în punctul D. Bisectoarea unghiului BAC intersectează dreapta BD în punctul E și dreapta CD în F. Demonstrați că triunghiul DEF este isoscel.

4. Fie punctul I intersecția bisectoarelor interioare ale unghiurilor B și C dintr-un triunghi ABC. Paralela prin punctul B la dreapta CI intersectează dreapta AC în punctul M, iar paralela prin punctul C la dreapta BI intersectează dreapta AB în punctul N. Demonstrați că $[BN]\equiv[CM]$.

5. În triunghiul ABC, (AD este bisectoarea unghiului BAC. Paralela prin punctul B la dreapta AD intersectează dreapta AC în punctul E, iar paralela prin punctul C la dreapta AD intersectează dreapta AB în punctul F. Demonstrați că: **1)** $[EF] \equiv [BC]$; **2)** $EF \parallel BC$ dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

6. Se consideră un triunghi isoscel ABC cu $[AB]\equiv[BC]$. Fie punctul D piciorul înălțimii din vârful A, punctul E simetricul lui B față de dreapta AC, punctul F simetricul punctului C față de mijlocul laturii AB, $\{G\}=BE\cap CF$, $\{H\}=AD\cap BE$ și $\{P\}=CE\cap BF$. Demonstrați că: **a)** punctele A, E, F sunt coliniare; **b)** ΔDEF este isoscel; **c)** punctele A, G, P sunt coliniare; **d)** $AB\perp CH$; **e)** $\mathcal{P}_{GBC} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{GEF}$.

Test 73

1. Fie triunghiul ABC. Paralela prin C la mediana $[BD]$ intersectează dreapta AB în punctul E. Demonstrați că punctul B este mijlocul segmentului $[AE]$.

2. a) Într-un triunghi isoscel înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente. **b)** Dacă două înălțimi ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

3. Se consideră punctele coliniare B, D, E, C în această ordine și un punct A pe mediatoarea segmentului DE, $A \notin DE$. Fie $DD' \perp AB$, $D' \in AB$ și $EE' \perp AC$, $E' \in AC$. Dacă $[DD'] \equiv [EE']$, demonstrați că: **a)** triunghiul ABC este isoscel; **b)** dreptele DD', EE' și mediatoarea segmentului BC sunt concurente.

4. Din vârful A al triunghiului ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ și $m(\sphericalangle A) \neq 60°$ se construiesc perpendicularele AD și AE respectiv pe dreptele suport ale medianelor $[BB']$ și $[CC']$ ($D \in BB'$ și $E \in CC'$). Demonstrați că:

a) $[AD] \equiv [AE]$; **b)** $[CD] \equiv [BE]$; **c)** $DE \parallel BC$.

5. Fie E un punct interior bazei $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC. Mediatoarea segmentului BE intersectează latura AB în M iar mediatoarea segmentului EC intersectează latura AC în N. Demonstrați că: $ME \parallel AC$ și $NE \parallel AB$.

6. Se consideră un triunghi isoscel MNP cu $[MN] \equiv [MP]$ și un punct $A \in (MP$, $A \neq P$. Dacă $AB \parallel MN$, $B \in NP$ iar D și E sunt respectiv, mijloacele segmentelor NP și BP, demonstrați că $AE \parallel MD$.

CLASA A VII-A

Patrulaterul convex. Paralelogramul. Dreptunghiul. Rombul. Pătratul

Rețineți!

➲ Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele se numește **paralelogram**.

➲ Într-un paralelogram $ABCD$, au loc proprietățile:

i) $(AB) \equiv (CD)$, $(BC) \equiv (AD)$; **ii)** $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DCB$; $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC$;

j) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, atunci $(OA) \equiv (OC)$, $(OB) \equiv (OD)$. **jj)** Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, atunci O este **centrul de simetrie** al paralelogramului.

➲ Dacă în patrulaterul convex $ABCD$ are loc una din condițiile **i)**, **ii)**, **j)**, **jj)**, atunci patrulaterul este paralelogram.

➲ Paralelogramul cu un unghi drept se numește **dreptunghi**.

➲ Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă are diagonalele congruente.

➲ Paralelogramul cu două laturi alăturate congruente se numește **romb**.

➲ Un paralelogram este romb dacă și numai dacă are diagonalele perpendiculare (este **ortodiagonal**).

➲ Un paralelogram este romb dacă și numai dacă o diagonală a sa este bisectoarea unui unghi al acestuia.

➲ Dreptunghiul cu două laturi alăturate congruente se numește **pătrat**.

Test 74

1. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$ știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele prime cuprinse între 10 și 20.

2. Perimetrul unui paralelogram $ABCD$ cu $AB=2BC$ și $m(\sphericalangle A)=40^\circ$ este egal cu 30 cm. **a)** Determinați lungimile laturilor paralelogramului. **b)** Dacă M este mijlocul laturii AB, determinați măsurile unghiurilor triunghiului MCD.

3. Fie un paralelogram $ABCD$ de centru O și punctele $M\in(AB$, $N\in(CD$ astfel încât $[AM]\equiv[CN]$ $(M\neq B)$. Demonstrați că: **1)** $BN \parallel DM$; **2)** punctele M, O, N sunt coliniare și $[OM]\equiv[ON]$.

4. Se consideră un paralelogram $ABCD$ cu $AB>BC$ și $m(\sphericalangle ACB)=45^\circ$. Mediatoarea diagonalei AC intersectează dreptele BC și AD, respectiv în E și F. Stabiliți natura patrulaterului $AECF$.

5. În paralelogramul $ABCD$, $m(\sphericalangle C)<90^\circ$, se construiește $BE\perp DC$ și $DF\perp AB$. Știind că $DF\cap BC=\{Q\}$ și $BE\cap AD=\{P\}$, să se demonstreze că patrulaterul $AQCP$ este paralelogram.

Test 75

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$. Completați propozițiile următoare: **a)** $MNPQ$ este ..... **b)** Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $MNPQ$ este ..... **c)** Dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci $MNPQ$ este ..... **d)** Dacă $ABCD$ este romb, atunci $MNPQ$ este ..... **e)** Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci $MNPQ$ este ..... **f)** Dacă $MNPQ$ este pătrat, atunci $[AC]$ și $[BD]$ sunt .....

2. În dreptunghiul $ABCD$ considerăm pe (AB) punctul F astfel încât $(AF)\equiv(FB)$, iar pe latura DC punctele M și N astfel încât $(CN)\equiv(NM)\equiv$ $\equiv(MD)$. Să se arate că triunghiul FNM este isoscel.

3. Fie H ortocentrul triunghiului echilateral ABC. Perpendiculara în A pe AB intersectează semidreapta $(BH$ în punctul M, iar perpendiculara în A pe AC intersectează semidreapta $(CH$ în punctul P. Să se arate că patrulaterul $AMHP$ este romb.

4. Demonstrați că dacă măsura unui unghi al unui romb este egală cu media aritmetică a măsurilor celor două unghiuri alăturate, atunci rombul este pătrat.

Test 76[*]

I. 1. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu: **a)** 180°; **b)** 240°; **c)** 360°; **d)** 480°.

2. Un unghi obtuz al unui paralelogram are măsura de 120°. Măsura unuia dintre unghiurile ascuțite este egală cu: **a)** 40°; **b)** 60°; **c)** 80°; **d)** 90°.

3. Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 18 cm și lățimea egală cu jumătate din lungime este egal cu: **a)** 48 cm; **b)** 44 cm; **c)** 54 cm; **d)** 84 cm.

4. Măsura unghiului format de diagonala unui pătrat cu una din laturi este de: **a)** 45°; **b)** 90°; **c)** 75°; **d)** 180°.

5. Un unghi al unui romb are măsura de 90°. Atunci acesta este un: **a)** dreptunghi; **b)** pătrat; **c)** trapez; **e)** patrulater oarecare.

6. În **figura 1**, avem: $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$. Atunci $ABED$ este: **a)** romb; **b)** paralelogram; **c)** dreptunghi; **d)** trapez.

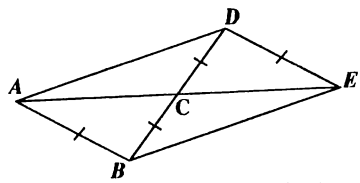


Fig. 1

7. În **figura 2**, avem $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ și D mijlocul laturii $[BC]$. Atunci avem: **a)** $[FD] \equiv [ED] \equiv [BD] \equiv [DC]$; **b)** $[BE] \equiv [CF]$; **c)** $[BD] \equiv [DC] \equiv [BE]$; **d)** $[BE] \equiv [FB]$.

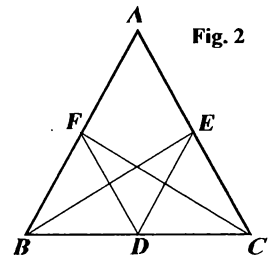


Fig. 2

8. Paralelogramul cu diagonalele congruente și perpendiculare este un: **a)** pătrat; **b)** romb; **c)** dreptunghi; **d)** trapez.

9. În **figura 3**, $ABCD$ este un paralelogram, iar $[BM$ și $[CM$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BCD$. Atunci $m(\sphericalangle BMC)$ este egală cu: **a)** 45°; **b)** 70°; **c)** 80°; **d)** 90°.

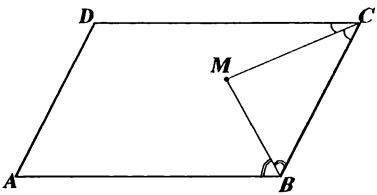


Fig. 3

II. 10. Să se demonstreze că mijloacele laturilor unui romb sunt vârfurile unui dreptunghi.

---

[*] La fiecare din problemele 1 - 9 numai un răspuns este corect.

11. Paralelogramele $ABCD$, $BCEF$ şi $CDGE$ au două câte două o latură comună. Să se demonstreze că dreptele BG, AE, DF, sunt concurente.

12. Se prelungesc medianele $[BN]$ şi $[CM]$; ($N \in [AC]$; $M \in [AB]$) ale triunghiului ABC cu segmentele $[NF] \equiv [BN]$ şi $[CM] \equiv [ME]$. Demonstraţi că: **a)** $\triangle AME \equiv \triangle BMC$; **b)** punctele E, A şi F sunt coliniare; **c)** $m(\sphericalangle B) = 90°$ dacă şi numai dacă $[BN] \equiv [CN]$.

Trapezul

Reţineţi!

- Un patrulater convex cu două laturi opuse paralele şi celelalte două neparalele se numeşte **trapez**.
- Trapezul cu laturile neparalele congruente se numeşte **trapez isoscel**.
- Un trapez este isoscel dacă şi numai dacă are diagonalele congruente.
- Un trapez este isoscel dacă şi numai dacă are unghiurile alăturate unei baze congruente.
- Trapezul cu un unghi drept se numeşte **trapez dreptunghic**.

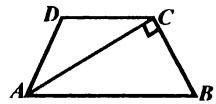
Test 77

1. Demonstraţi că: **a)** un trapez cu diagonalele congruente este trapez isoscel; **b)** un triunghi cu două mediane congruente este triunghi isoscel.

2. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \| CD$. Ştiind că $4 \cdot m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C)$, aflaţi măsurile unghiurilor trapezului.

3. Măsurile unghiurilor A, B, C, D ale patrulaterului convex $ABCD$ satisfac relaţiile: $m(\sphericalangle A) \neq m(\sphericalangle D)$ şi $2 \cdot m(\sphericalangle B) = 2 \cdot m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle D)$. Arătaţi că $ABCD$ este trapez dreptunghic, dacă $AC \mid AD$.

4. În trapezul isoscel $ABCD$ din figura alăturată avem: $AB \| DC$, $DC = BC$ şi $AC \perp BC$.



a) Demonstraţi că (AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAB$.

b) Determinaţi măsurile unghiurilor trapezului $ABCD$.

c) Dacă $BC = 5$ cm, determinaţi perimetrul trapezului $ABCD$.

5. Se consideră un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 90°$. Dacă diagonalele trapezului sunt perpendiculare şi $AC = 2BC$, demonstraţi că $BD = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Teorema lui Thales şi reciproca ei

Reţineţi!

➲ ***Teorema lui Thales***

Fie triunghiul ABC şi $M\in(AB\setminus\{B\}$, $N\in(AC\setminus\{C\}$. Dacă $MN \parallel BC$, atunci $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NC}$.

➲ ***Teorema reciprocă a teoremei lui Thales.*** Fie triunghiul ABC şi $M\in(AB$, $N\in(AC$, astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ sau $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ sau $\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC}$, atunci $MN \parallel BC$.

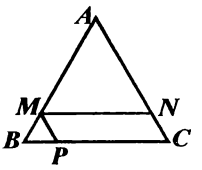
Test 78

1. În ΔABC din figura alăturată avem $MN \parallel BC$, $MP \parallel AC$, $AM = 6$ cm, $AN = 4$ cm, $MB = 3$ cm, $BP = 3$ cm. Aflaţi:

a) lungimea segmentului $[NC]$;

b) lungimea segmentului $[BC]$;

c) lungimea segmentului $[MN]$.



2. Într-un paralelogram $ABCD$ cu $AB = 12$ cm şi $BC = 8$ cm se consideră punctul $M \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$.

Fie $MN \parallel AB$, $N \in BC$ şi $MP \parallel BC$, $P \in CD$.

a) Determinaţi perimetrul patrulaterului $MNCP$.

b) Demonstraţi că $PN \parallel BD$.

3. Fie G centrul de greutate al unui triunghi ABC. Paralela prin G la BC intersectează dreptele AB şi AC în punctele D şi respectiv E. Ştiind că BD=6cm, AE=16cm, determinaţi lungimile segmentelor: $[AD]$, $[AB]$, $[EC]$, $[AC]$.

4. Fie un patrulater convex $ABCD$ şi punctele $E\in(AC)$, $F\in(BC)$, $G\in(CD)$ astfel încât $EF \parallel AB$ şi $EG \parallel AD$. Arătaţi că: **a)** $FG \parallel BD$; **b)** $\frac{BF}{BC}+\frac{GC}{CD}=1$.

5. Într-un triunghi ABC, semidreapta $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$. Paralela prin punctul C la dreapta AD intersectează dreapta AB în punctul E. Arătaţi că $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

Linia mijlocie în triunghi. Linia mijlocie în trapez

Reţineţi!

➲ Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numeşte **linie mijlocie a triunghiului**.

➲ Linia mijlocie a unui triunghi, determinată de două laturi, este paralelă cu cea de a treia latură şi, are ca lungime $\frac{1}{2}$ din lungimea celei de a treia laturi a triunghiului. (***Teorema liniei mijlocii a unui triunghi***)

➲ Dacă M este mijlocul laturii (AB) a triunghiului ABC şi $MN \parallel BC$, $N \in (AC)$, atunci N este mijlocul laturii (AC). (***Teorema reciprocă a teoremei liniei mijlocii a unui triunghi***)

➲ Segmentul determinat de mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numeşte **linie mijlocie a trapezului**.

➲ Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele trapezului şi are lungimea egală cu semisuma lungimilor celor două baze. (***Teorema liniei mijlocii a trapezului***)

Test 79

1. Fie punctele D şi E mijloacele laturilor AB şi, respectiv, BC ale unui triunghi ABC. Determinaţi perimetrul triunghiului ABC în fiecare din următoarele situaţii:

a) Perimetrul triunghiului ΔBDE este egal cu 18 cm.

b) Perimetrul patrulaterului $ACED$ este egal cu 86 cm şi $AC = 30$ cm.

c) $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm şi perimetrul patrulaterului $ACED$ este egal cu 12 cm.

2. Fie punctele M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD şi, respectiv, DA ale unui patrulater convex $ABCD$. **a)** Arătaţi că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. **b)** Dacă perimetrul patrulaterului $MNPQ$ este egal cu 48 cm, aflaţi suma lungimilor diagonalelor patrulaterului $ABCD$.

3. Fie punctul M mijlocul laturii AB a unui triunghi ΔABC. Construim $MN \parallel BC$, $N \in AC$ şi $NP \parallel AB$, $P \in BC$. Arătaţi că $MP \parallel AC$.

4. În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $m(\sphericalangle B) = 90°$ şi $m(\sphericalangle C) = 60°$, diagonala BD are lungimea egală cu 8 cm şi este bisectoarea unghiului ADC. Determinaţi lungimea liniei mijlocii a trapezului.

5. Fie punctele M şi N mijloacele laturilor neparalele $[BC]$ şi $[AD]$ ale unui trapez isoscel cu $AB > CD$ şi $\{E\} = MN \cap BD$, $\{F\} = AC \cap MN$. Ştiind că $ME = 5$ cm, $EF = 3$ cm şi $m(\sphericalangle DAB) = 60°$ determinaţi perimetrul trapezului.

Asemănarea triunghiurilor.
Teorema fundamentală a asemănării. Criteriile de asemănare

Reţineţi!

➲ Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$. Dacă $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$ şi $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, se spune că triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sunt asemenea şi se notează $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

➲ ***Teorema fundamentală a asemănării t.f.a.***

Fie triunghiul ABC şi $DE \parallel BC$, $A \neq D$, $D \in AB$, $E \in AC$. Atunci $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

➲ **Criteriile de asemănare a triunghiurilor.**

Cazul I (*u.u.*): Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ şi $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Cazul II (*l.u.l.*): Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ şi $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Cazul III (*l.l.l.*): Dacă $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Test 80

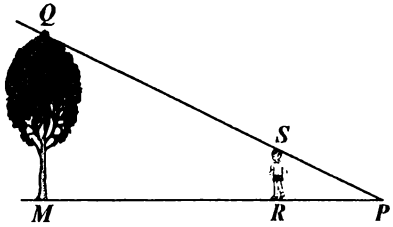
1. Laturile neparalele AD şi BC ale unui trapez $ABCD$ cu AB=8 cm, BC=9 cm, CD=3 cm şi AD=6 cm se intersectează într-un punct E. **a)** Determinaţi perimetrul triunghiului CDE. **b)** Dacă $AC \cap BD=\{O\}$, determinaţi valoarea raportului $\frac{DO}{DB}$. **c)** Dacă $F \in AD$ astfel încât $OF \parallel AB$, iar $G \in OF \cap BC$, demonstraţi că $[OF] \equiv [OG]$ şi determinaţi lungimile segmentelor $[GF]$ şi $[EF]$.

2. **a)** Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a unui triunghi ABC şi punctele $E \in AB$, $F \in AC$ astfel încât $EF \parallel BC$. Demonstraţi că AM conţine mijlocul segmentului $[EF]$. **b)** Dacă dreapta suport a medianei $[AM]$ a unui triunghi ABC conţine mijlocul unui segment nenul $[EF]$ ce are extremităţile pe dreptele AB şi AC, atunci $EF \parallel BC$. **c)** În orice trapez punctul de intersecţie a laturilor neparalele, punctul de intersecţie a diagonalelor şi mijloacele bazelor sunt coliniare.

3. Fie un trapez $ABCD$ cu bazele $AB=a$ şi $CD=b$ şi punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{DM}{MA}=\frac{a}{b}$ şi $MN \parallel AB$. Determinaţi lungimea segmentului $[MN]$.

4. Fie un romb $ABCD$ și E un punct oarecare interior segmentului $[CD]$. Se notează cu F intersecția dreptelor BE și AD. Determinați lungimea laturii rombului știind că $CE = 4$ cm și $DF = 3$ cm.

5. a) La ora $14^{\underline{00}}$ umbra plopului MQ din fața locuinței lui Vasilică are lungimea $MP = 27$ m. Știind că Vasilică are înălțimea $SR = 1{,}60$ m și la ora $14^{\underline{00}}$ are lungimea umbrei $RP = 1{,}80$ m, aflați înălțimea plopului. (figura alăturată)



b) La ora $17^{\underline{00}}$ umbra copacului are lungimea 36 m. Câți metri are în acel moment umbra lui Vasilică?

Test 81

1. Demonstrați că în două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare și raportul: **a)** înălțimilor omoloage; **b)** medianelor omoloage; **c)** bisectoarelor omoloage.

2. Fie $[BB']$, $[CC']$ înălțimi într-un triunghi ABC ce nu are nici un unghi drept și H ortocentrul triunghiului. Stabiliți valoarea logică a fiecăreia din propozițiile: **a)** $\Delta ACC' \sim \Delta ABB'$; **b)** $\Delta C'HB \sim \Delta B'HC$; **c)** $\Delta BHC \sim \Delta C'HB'$; **d)** $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$.

3. a) Fie două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ având $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle A')=90°$. Demonstrați că dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (cazul i.c.)

b) Fie $[AD]$ înălțime într-un triunghi ABC cu unghiurile B și C ascuțite. Știind că $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD}$, determinați $m(\sphericalangle BAC)$.

4. a) Fie un triunghi ABC cu $AB=9$ cm, $BC=8$ cm, $AC=10$ cm și $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $BD=2AD$ și $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle C$. Determinați perimetrul triunghiului ADE.

b) Fie D piciorul bisectoarei unghiului C al unui triunghi isoscel ABC de bază $[BC]$. În ipoteza $BC^2 = AB \cdot BD$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Reținеți!

➲ ***Teorema înălțimii.*** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este medie proporțională între lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

➲ ***Teorema catetei.*** Lungimea catetei unui triunghi dreptunghic este medie proporțională între lungimea ipotenuzei și a proiecției catetei respective pe ipotenuză.

➲ ***Teorema a doua a înălțimii.***
Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$. Dacă $D = pr_{BC}A$, atunci $AD \cdot BC = AB \cdot AC$.

➲ ***Teorema lui Pitagora.***
Fie triunghiul ABC. Dacă $m(\sphericalangle A) = 90°$, atunci $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

➲ ***Teorema reciprocă a teoremei lui Pitagora.***
Fie triunghiul ABC. Dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2$, atunci $m(\sphericalangle A) = 90°$.

Test 82

1. Se consideră un triunghi ABC cu $m(\sphericalangle A)=90°$ în care $[AD]$ este înălțime. **a)** Știind că $AB= 2\sqrt{3}$ cm și $BD=2$ cm, determinați: BC, AC, AD. **b)** Dacă $AC= 3\sqrt{2}$ dm și $AD=0{,}4$ m, aflați: DC, BD, AB.
c) Determinați DC, AC, AB, BC știind că $AD = 10\sqrt{6}$ mm și $BD=2$ cm.

2. Într-un triunghi MNP cu $m(\sphericalangle M)=90°$ se consideră înălțimea $[MA]$. **a)** Determinați lungimile laturilor triunghiului dacă $MA= 3\sqrt{2}$ dm și $NP=4NA$. **b)** Știind că $MP =12$ cm și $NA= \frac{4}{5}AP$, aflați AP, MA, NP, MN.

3. Într-un triunghi ABC cu $AB=10\sqrt{6}$ mm, $BC=0{,}2\sqrt{3}$ dm și $AC= 0{,}03\sqrt{2}$ m se construiește $BD \perp AC$, $D \in AC$, $DE \parallel BC$, $E \in AB$ și $DF \perp BC$, $F \in BC$. **a)** Este triunghiul ABC dreptunghic ? **b)** Determinați perimetrul patrulaterului $BEDF$.

4. Fie un triunghi ABC și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. **a)** Determinați BC, BD, DC știind că $AB= 3\sqrt{3}$ cm, $AC= 3\sqrt{2}$ cm și $AD^2 = BD \cdot DC$. **b)** Dacă $AD= 2\sqrt{5}$ cm, $AC=6$ cm și $AB^2 = BD \cdot BC$ aflați AB și BC. **c)** Știind că $AD \cdot BC = AB \cdot AC$ și că $BD = 3$ m, iar $DC=12$ m, aflați AD, AB, AC .

Test 83

1. a) Determinați lungimea laturii unui : **1)** triunghi echilateral a cărui înălțime este de $2\sqrt{3}$ m; **2)** pătrat cu diagonala de 8 cm. **b)** Fie $[AD]$ și $[BE]$ înălțimi în triunghiul ABC cu $AB=AC=15$ cm. Știind că $AD=\frac{2}{3}BC$, determinați AD, BC, BE și lungimea medianei $[BM]$. **c)** Determinați înălțimile triunghiului ABC știind că $AB=2\sqrt{2}$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 3\sqrt{2}$ cm.

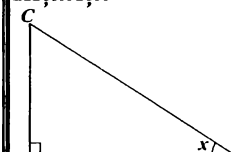
2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu AB=5 cm, BC=8 cm şi înălţimea AE=4 cm, $E \in (BC)$. Fie M mijlocul segmentului $[DE]$ şi $\{N\}=CM \cap AE$. Determinaţi ED, CM, CN.

3. a) Se dă trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare AB=15 cm, latura neparalelă AD=9 cm şi diagonala AC=12 cm. Determinaţi perimetrul trapezului. **b)** Determinaţi lungimea înălţimii unui trapez $ABCD$ cu $AD \| BC$ şi AD=9 cm, BC=30 cm, AB=13 cm, CD=20 cm.

4. Determinaţi lungimile diagonalelor unui romb cu latura de 26 cm şi înălţimea de 24 cm.

Sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta. Rezolvarea triunghiului dreptunghic

Reţineţi!



$\sin x = \frac{AC}{BC}$; $\cos x = \frac{AB}{BC}$; $\operatorname{tg} x = \frac{AC}{AB}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{AB}{AC}$.

$\sin(90-x) = \cos x$; $\cos(90-x) = \sin x$; $\operatorname{tg}(90-x) = \operatorname{ctg} x$; $\operatorname{ctg}(90-x) = \operatorname{tg} x$.

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

$0 \le \sin x \le 1$; $0 \le \cos x \le 1$ $(0 \le x \le 90)$; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Test 84

1. Se consideră un triunghi ABC cu $m(\sphericalangle A)=90°$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

a) Dacă a=10 cm şi b=8 cm, determinaţi $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{ctg} B$.

b) Verificaţi egalităţile: **1)** $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$; **2)** $tgB = \frac{\sin B}{\cos B}$;

3) $1 + tg^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$; **4)** $\sin(90°-B) = \cos B$; **5)** $\operatorname{tg}(90°-B) = \operatorname{ctg} B$.

c) Dacă $\sin C = \frac{3}{5}$, calculaţi $\cos C$, $\operatorname{tg} C$, $\operatorname{ctg} C$, $\sin B$, $\cos B$.

2. Determinaţi perimetrul triunghiului ABC cu $m(\sphericalangle A)=90°$ în fiecare din cazurile: **a)** AC=4 cm şi $\sin B = \frac{2}{3}$; **b)** BC=10 m şi $\cos C = \frac{3}{5}$; **c)** BC=20 cm şi $tgB = \frac{3}{4}$.

3. Fie un triunghi ABC şi $[AD]$ o înălţime a sa ($D \in [BC]$).Completaţi tabelul:

	AB	BC	CA	AD	$m(\sphericalangle A)$	$m(\sphericalangle B)$	$m(\sphericalangle C)$
a				6	75	60	
b	4		8		60		
c		12				75	60

(Lungimile segmentelor sunt exprimate în dm, iar măsurile unghiurilor în grade sexagesimale).

4. Se consideră un triunghi ABC cu unghiurile B şi C ascuţite. Ştiind că AB=6 cm, BC=1 dm şi $\text{tg}(\sphericalangle B)=\text{ctg}(\sphericalangle C)$, determinaţi AC, $\sin(\sphericalangle B)$, $\cos(\sphericalangle C)$.

Test 85

1. Fie un triunghi ABC şi $D \in BC$ astfel încât $AD \perp BC$. Completaţi tabelul:

	AB	BC	CA	AD	$m(\sphericalangle A)$	$m(\sphericalangle B)$	$m(\sphericalangle C)$
a	16				30	105	
b	$2\sqrt{3}$		$3\sqrt{2}$	3			
c	$8\sqrt{3}$		8		90		

(Lungimile segmentelor sunt exprimate în m, iar măsurile unghiurilor în grade sexagesimale).

2. Într-un triunghi ABC se cunoaşte: $AB = 12$ dm şi $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

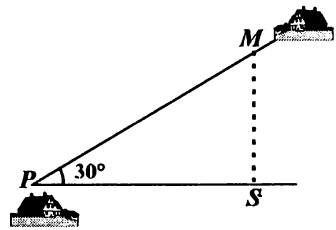
Dacă $\text{tg}C = 2\sin C$, determinaţi: **a)** măsurile unghiurilor triunghiului ABC; **b)** lungimea laturii AC a triunghiului.

3. Într-un triunghi ABC cu $BC = 3$ cm, $AB = \sqrt{3}$ cm, măsurile unghiurilor B şi C mai mici decât 90°, are loc relaţia $\sin B = \cos C$, determinaţi: **a)** $\text{tg}\, B$ şi $\text{tg}\, C$; **b)** perimetrul triunghiului.

4. Într-un paralelogram $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A)=120°$ se construiesc înălţimile $[DE]$ şi $[DF]$, $E \in BC$, $F \in AB$. Ştiind că perimetrul paralelogramului este de $20\sqrt{3}$ dm şi $DE = 6$ dm, aflaţi lungimile laturilor paralelogramului şi DF.

5. a) Un alpinist urcă pe o pantă cu înclinaţia de 30°, ca în figura alăturată. Ştiind că între cabanele P şi M alpinistul a parcurs 1,8 km, aflaţi la ce altitudine este cabana M faţă de punctul P de plecare.

b) Aceeaşi problemă dacă panta are înclinaţia de 45°. ($\sqrt{2} \simeq 1{,}41$)



Aria triunghiului. Aria patrulaterului convex

Reţineţi!

➲ **Aria triunghiului.** În triunghiul ABC, notăm: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; h_a, h_b, h_c - lungimile înălţimilor corespunzătoare laturilor BC, AC şi respectiv AB; $p = \frac{a+b+c}{2}$, R - raza cercului circumscris; r - raza cercului înscris; S - aria triunghiului.

$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$; $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B$.

➲ Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

➲ **Aria paralelogramului.** Fie paralelogramul $ABCD$ şi $DD' \perp AB$, $D' \in AB$; $h = DD'$; $AB = a$, $S = a \cdot h$; $S = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

➲ **Aria dreptunghiului.** $S = AB \cdot AD = L \cdot l$ ($ABCD$ dreptunghi).

➲ **Aria pătratului.** $S = AB^2 = l^2$ ($ABCD$ pătrat).

➲ **Aria rombului.** $S = \frac{AC \cdot BD}{2}$; $S = a \cdot h$, unde $h = DD'$, $DD' \perp AB$, $D' \in AB$, $AB = a$.

➲ **Aria trapezului.** $S = \frac{(AB + CD) \cdot h}{2}$, unde $AB \parallel CD$ şi $h = DD'$, $DD' \perp AB$, $D \in AB$.

➲ **Aria patrulaterului ortodiagonal** ($AC \perp BD$). $S = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

Test 86

1. Se consideră un triunghi ABC în care $[AD]$ şi $[CE]$ sunt înălţimi.
a) Dacă $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm, $AD = 4$ cm, determinaţi aria triunghiului şi CE. **b)** Determinaţi S_{ABC}, AD şi CE ştiind că $AB = 6$ dm, $BC = 9$ dm şi $m(\sphericalangle ABC) = 60°$. **c)** Dacă $AB = 13$ cm, $BC = 21$ cm, $AC = 20$ cm, aflaţi S_{ABC} şi $\sin A$. **d)** Dacă ΔABC este echilateral şi $AD = 6$ dm, determinaţi S_{ABC}.

2. Fie un triunghi ABC. **a)** Aflaţi BC ştiind că $S_{ABC} = 14$ m^2, $AC = 4\sqrt{2}$ m, $AB = 5$m şi $m(\sphericalangle A) < 90°$. **b)** Determinaţi S_{ABC} dacă $AB = 3$ dm şi $\operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg} C$. **c)** Dacă $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$ cm^2, $AC = 6$ cm şi $\operatorname{tg} C = \sqrt{3}$, determinaţi perimetrul triunghiului şi măsurile unghiurilor sale. **d)** Dacă ΔABC este echilateral şi $S_{ABC} = 8\sqrt{3}$ cm^2, aflaţi $\mathcal{P}_{ABC}$.

3. Fie un triunghi ABC şi un punct M. **a)** Dacă M este piciorul medianei din vârful A atunci $S_{ABM} = S_{ACM}$. **b)** Într-un triunghi ABC se notează cu E mijlocul medianei $[AM]$. Aflaţi aria triunghiului ABC ştiind că aria triunghiului ΔBCE este egală cu 9 cm^2.

4. Fie O centrul unui paralelogram $ABCD$.
a) Arătați că triunghiurile: ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD și ΔDOA sunt echivalente (au ariile egale).
b) Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor $[OC]$ și, respectiv, $[OD]$, aflați cât la sută din aria paralelogramului $ABCD$ reprezintă aria patrulaterului $ABMN$.

Test 87

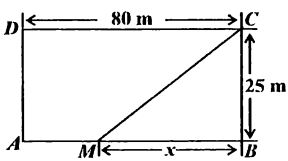
1. **a)** Aria unui triunghi dreptunghic este de 726 m^2, iar una dintre catete are lungimea de 33 m. Aflați înălțimea triunghiului. **b)** Determinați perimetrul unui triunghi isoscel cu aria de 192 dm^2 și înălțimea corespunzătoare bazei de 16 dm. **c)** Calculați aria unui triunghi ABC știind că: $AB = 20$cm, $BC = 28$ cm și $m(\sphericalangle ABC) = 150°$.

2. Fie G centrul de greutate al unui triunghi ABC. **a)** Demonstrați că: $S_{GAB} = S_{GBC} = S_{GAC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$. **b)** Dacă M este mijlocul laturii AB determinați valoarea raportului $\frac{S_{AGC}}{S_{ACM}}$.

3. Într-un triunghi ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ și $m(\sphericalangle C) = 30°$, înălțimea $[AD]$ are lungimea egală cu $6\sqrt{3}$ dm.
a) Aflați aria triunghiului ABC.
b) Dacă $DE \perp AC$, $E \in AC$, determinați valoarea raportului ariilor triunghiurilor ΔCDE și ΔABC.

4. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) se notează cu D piciorul înălțimii din A și cu E proiecția punctului D pe dreapta AC. Dacă $AD = 40$ cm și $AE = 32$ cm, determinați:
a) perimetrul și aria triunghiului ABC;
b) distanța de la vârful C al triunghiului la dreapta AB.

5. Bunicul lui Vasilică are o grădină dreptunghiulară $ABCD$ și însămânțează cu legume suprafața triunghiulară MBC. **a)** Pe baza datelor din figura alăturată, suprafața rămasă necultivată cu legume poate avea 999 m^2? **b)** Aflați x dacă perimetrul suprafeței necultivate cu legume este egal cu 190 m.



Test 88

1. **a)** O latură a unui dreptunghi este de 16 m, iar aria dreptunghiului este egală cu 384 m^2. Să se afle lungimea diagonalei dreptunghiului. **b)** Să se determine aria unui dreptunghi având lungimea diagonalei de $20\sqrt{2}$ m şi măsura unghiului format de diagonale egală cu 45°. **c)** Măsura unghiului format de diagonalele unui dreptunghi cu perimetrul de $12\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm este egală cu 60°. Aflaţi aria dreptunghiului. **d)** Într-un dreptunghi $ABCD$ de centru O se notează cu E proiecţia vârfului A pe diagonala BD ($E \in OB$). Determinaţi perimetrul dreptunghiului ştiind că $EO = \frac{BD}{4}$ şi $\mathcal{A}_{ABCD} = 108\sqrt{3}$ cm^2.

2. Determinaţi: **a)** aria unui paralelogram $ABCD$ cu AB=5cm, BC=4cm şi $m(\sphericalangle ADC)=135°$; **b)** aria unui paralelogram cu diagonalele de 14 cm şi 24 cm şi măsura unghiului format de diagonale egală cu 60°; **c)** aria şi perimetrul unui trapez isoscel ortodiagonal cu bazele de 6 cm şi 8 cm.

3. **a)** $ABCD$ este un romb cu $m(\sphericalangle DCB)=120°$ şi distanţa de la centrul său la o latură egală cu 9 cm. Aflaţi aria rombului şi lungimea înălţimii acestuia. **b)** $MNPQ$ este un pătrat, iar A este un punct interior pătratului astfel încât ΔAMN este echilateral. Determinaţi aria triunghiului AQP ştiind că aria pătratului este egală cu 4 cm^2.

4. **a)** Determinaţi aria unui trapez dreptunghic cu baza mică de 8 cm, înălţimea de 6 cm şi măsura unghiului ascuţit de 60°. **b)** Un trapez isoscel are aria egală cu 85 cm^2 şi înălţimea de 5 cm. Ştiind că diferenţa bazelor trapezului este de 24 cm, aflaţi perimetrul acestuia.

Cercul

Reţineţi!

➲ Fie $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ şi O un punct din plan. Se numeşte cerc de centru O şi rază r mulţimea punctelor M din plan pentru care $OM = r$. Se notează $\mathcal{C}(O,r) = \{M / OM = r\}$. OM se numeşte **rază**.

➲ Fie cercul $\mathcal{C}(O,r)$. Se numeşte **interiorul** cercului mulţimea int $\mathcal{C}(O,r) = \{M$ din plan $/ OM < r\}$. Se numeşte exteriorul cercului $\mathcal{C}(O,r)$, mulţimea Ext $\mathcal{C}(O,r) = \{M$ din plan $/ OM > r\}$.

➲ Se numeşte **disc** de centru O şi rază $r > 0$, mulţimea $\mathcal{C}(O,r) \cup$ Int $\mathcal{C}(O,r) =$ $= \{M$ din plan $/ OM \leq r\}$.

➲ Segmentul determinat de două puncte distincte ale unui cerc se numeşte **coardă**.

O coardă care conţine centrul cercului, se numeşte **diametru**.

➲ Un unghi cu vârful în centrul cercului se numeşte **unghi la centru** pentru acel cerc.

➲ Fie A şi B două puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(O,r)$, care nu sunt diametral opuse. Se numeşte **arc mic** $\overset{\frown}{AB}$ mulţimea formată din punctele A, B şi punctele cercului $\mathcal{C}(O,r)$ care aparţin interiorului unghiului AOB. Se numeşte **arc mare** $\overset{\frown}{AB}$ mulţimea punctelor cercului $\mathcal{C}(O,r)$ care nu aparţin interiorului unghiului AOB. Dacă A şi B sunt capetele unui diametru şi M este un punct al cercului diferit de acestea, atunci arcul $\overset{\frown}{AMB}$ se numeşte **semicercul** AMB.

➲ Dacă A şi B sunt puncte distincte ale unui cerc, atunci diametrul perpendicular pe coarda (AB) conţine mijlocul coardei (AB) şi mijloacele arcelor $\overset{\frown}{AB}$ (arc mic şi arc mare).

➲ Dacă două coarde (AB) şi (CD) ale aceluiaşi cerc $\mathcal{C}(O,r)$ sunt congruente, atunci arcele mici $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{CD}$ sunt congruente şi reciproc, dacă arcele mici $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{CD}$ ale unui cerc sunt congruente, atunci $(AB) \equiv (CD)$.

➲ Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci distanţele de la centrul cercului la coarde sunt egale şi reciproc.

➲ Un unghi $\sphericalangle BAC$ se numeşte **unghi înscris** în cercul $\mathcal{C}(O,r)$ dacă A, B, C sunt puncte ale cerului $\mathcal{C}(O,r)$.

➲ Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

➲ Toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt unghiuri drepte.

➲ Lungimea cercului $\mathcal{C}(O,r)$ este: $L = 2\pi R$ ($\pi = 3,1415\ldots$).

➲ **Aria discului** cu raza R este: $\mathcal{A} = \pi R^2$.

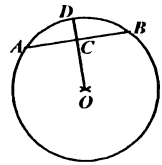
Test 89

1. Pe un cerc $\mathcal{C}(O,R)$ se consideră punctele M, N, P, Q în această ordine astfel încât $m(\overset{\frown}{MN})=60°$, $m(\overset{\frown}{NP})=90°$, $m(\overset{\frown}{PQ})=120°$.
a) Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului $MNPQ$ și măsura unghiului format de diagonalele patrulaterului. **b)** Demonstrați că $MN \parallel PQ$. **c)** Dacă A și B sunt mijloacele arcelor $\overset{\frown}{NP}$ și $\overset{\frown}{MQ}$ iar $OA \cap NP=\{C\}$, $OB \cap MQ=\{D\}$, demonstrați că: **1)** $CD \parallel PQ$; **2)** $CD=\frac{AB\sqrt{2}}{2}$.

2. Fie coarda $[AB]$ a cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Dacă $AB = 8$ cm și distanța de la centrul cercului la dreapta AB este egală cu 4 cm, aflați raza cercului și măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$.

3. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ cu $R = 10$ cm se consideră punctele A și B astfel încât $m(\overset{\frown}{AB}) = 60°$. Aflați lungimea coardei AB și distanța de la punctul O la dreapta AB.

4. În figura alăturată punctul C este mijlocul coardei $[AB]$, iar punctul D este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$. Dacă $CD = 5$ cm și $OB = 15$ cm, determinați lungimea coardei $[AB]$.



Test 90

1. Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, R)$, iar punctul M aparține cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Aflați lungimile coardelor $[MA]$ și $[MB]$ știind că:
a) $R = 40$ cm și $m(\sphericalangle BAM) = 30°$. **b)** $R = 4{,}5$ cm și $m(\sphericalangle MBA) = 45°$.

2. Pe un cerc se consideră punctele A, B, C, D în această ordine, astfel încât $m(\overset{\frown}{AB}) = 50°$; $m(\overset{\frown}{BC}) = 92°$; $m(\overset{\frown}{CD}) = 110°$. Determinați:
a) Măsura arcului mic $\overset{\frown}{AD}$; **b)** măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$; **c)** măsurile unghiurilor formate de diagonalele patrulaterului cu laturile acestuia; **d)** măsura unghiului ascuțit format de diagonalele patrulaterului; **e)** măsura unghiului format de dreptele BC și AD.

3. Un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC = 26$ m și $BC = 20$ m este înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O,R)$. Determinați R.

4. Pe un semicerc de diametru $[AB]$ se consideră două puncte distincte M și N. Fie $AM \cap BN = \{P\}$ și $AN \cap BM = \{Q\}$. Demonstrați că $PQ \perp AB$.

Lungimea cercului. Aria discului

Test 91

1. Fie $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{A}$ lungimea cercului şi, respectiv, aria discului de rază R. Completaţi tabelul alăturat:

Unitatea de măsură pentru lungime şi arie este cm şi, respectiv, cm^2.

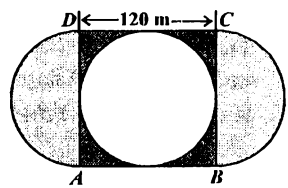
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
R	10					1,2	
$\mathcal{L}$		12π	26π				
$\mathcal{A}$				169π	18π		$5,76\pi$

2. $[AB]$ este coardă în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Să se determine măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ ştiind că: aria discului $\mathcal{D}(O, R)$ este egală cu $1,44\pi$ cm^2 şi $AB = \frac{6}{5}\sqrt{3}$ cm.

3. $[AB]$ este coardă în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Să se determine măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ ştiind că: lungimea cercului $\mathcal{C}(O, R)$ este egală cu 10π cm^2 şi distanţa de la punctul O la coarda AB este egală cu $2,5\sqrt{3}$ cm.

4. Se ştie că punctele A şi B sunt situate pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât $AB = 7\sqrt{2}$ cm şi măsura unghiului $\sphericalangle AOB = 90°$. Aflaţi aria discului $\mathcal{D}(O, R)$ şi lungimea cercului $\mathcal{C}(O, R)$.

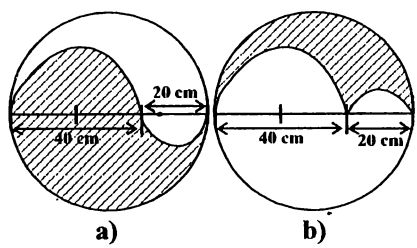
5. Figura alăturată reprezintă schematic un stadion. $ABCD$ este pătrat cu latura de 120 m, iar în exteriorul lui sunt două semidiscuri cu diametrul AD, respectiv, BC.



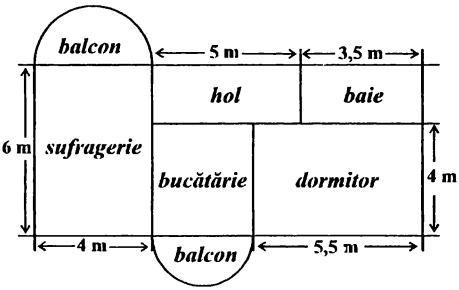
a) Aflaţi aria părţii haşurate din figură.

b) Stadionul este împrejmuit cu un gard. Aflaţi lungimea gardului. ($\pi \simeq 3,14$)

6. Diametrul cercului din fiecare figură alăturată este împărţit în două părţi de lungime 40 cm şi, respectiv, 20 cm. Apoi se construiesc semicercuri de diametru 40 cm şi 20 cm. Aflaţi raportul dintre aria figurii nehaşurate şi aria figurii haşurate în ambele cazuri.



7. În figura alăturată este prezentată schematic pardoseala apartamentului lui Ionescu alcătuit din două camere și două balcoane în formă de semidiscuri.



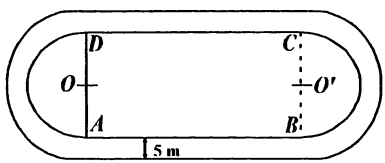
a) Aflați pe baza dimensiunilor de pe figură în metri pătrați suprafața apartamentului (inclusiv balcoanele) cu aproximație de $\frac{1}{100}$ prin lipsă (se știe că $\pi \simeq 3{,}14$).

b) Mozaicul din balcoane este acoperit cu covorașe. Ce suprafață de material a cumpărat Ionescu dacă la decupare a pierdut 25% din materialul cumpărat? Aproximați cu $\frac{1}{100}$ prin lipsă.

c) Baia și bucătăria au fost pavate cu gresie. Dacă un metru pătrat de gresie costă 20 de lei și se pierde 10% din suprafața pavată, aflați ce sumă a achitat Ionescu pentru gresie.

d) Ionescu a achiziționat apartamentul prin agenția imobiliară „Casa Nouă" la prețul de 500 € metrul pătrat construibil (inclusiv balcoanele). Aflați suma achitată de Ionescu dacă comisionul agenției a fost de 4% din suma solicitată de vânzător, iar suprafața luată în calcul a fost cea calculată la punctul **a)**.

8. În figura alăturată este reprezentat schematic un teren de sport format dintr-un dreptunghi $ABCD$ și două semidiscuri cu diametrul egal cu lățimea dreptunghiului.



Pe marginea terenului s-a amenajat o pistă de atletism cu lățimea de 5 m. Se știe că $AD = 80$ m și $AB = 150$ m. ($\pi \simeq 3{,}14$).

a) Un atlet la un antrenament trebuie să parcurgă de 10 ori pista ce înconjoară terenul. Aflați distanța minimă și distanța maximă ce poate fi parcursă de sportiv.

b) Terenul este acoperit cu un covor. Dacă un metru pătrat de covor a costat 100 lei, aflați cât a costat acoperirea terenului.

c) Pista a fost acoperită cu gazon. Știind că la 1 m^2 de teren se folosesc 100 g sămânță, ce cantitate de sămânță s-a cumpărat?

d) Cât a costat gazonul dacă un kilogram de gazon costă 100 de lei?

Poligoane regulate

Reţineţi!

➲ Un poligon se numeşte **poligon convex** dacă oricare ar fi o latură a sa, toate vârfurile poligonului nesituate pe acea latură se află situate de aceeaşi parte a dreptei suport a acelei laturi.

➲ Se numeşte **poligon regulat** un poligon convex cu toate unghiurile şi laturile congruente.

➲ Dacă printr-un procedeu oarecare, am împărţit un cerc în n arce congruente ($n \geq 3$) şi ducem coardele care le subîntind pe fiecare din ele, unind punctele de diviziune succesive, obţinem un poligon regulat înscris în cerc.

Latura, apotema şi aria unui triunghi echilateral şi a unui pătrat înscris în cerc

$l_3 = R\sqrt{3}$; $a_3 = \frac{R}{2}$; $\mathcal{A}_3 = \frac{l_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. $l_4 = R\sqrt{2}$; $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; $\mathcal{A}_4 = l_4^2 = 2R^2$.

Test 92

1. Ştiind că raza cercului circumscris unui triunghi echilateral este egală cu 8 cm, aflaţi lungimea laturii, apotemei şi aria triunghiului.

2. Ştiind că apotema unui pătrat are lungimea de 12 cm, aflaţi lungimea laturii şi aria pătratului.

3. Un poligon are lungimea laturii de $4\sqrt{3}$ cm şi apotema de 2 cm. Aflaţi aria poligonului.

4. Un poligon regulat are lungimea laturii de 8 cm şi raza cercului circumscris de $4\sqrt{2}$ cm. Aflaţi perimetrul şi aria poligonului.

*Test 93**

I.1. Lungimea cercului cu raza de 10 m este egală cu: **a)** 20 cm; **b)** 20π m; **c)** 10 m; **d)** 12π m.

2. Aria unui disc este 361π m^2, atunci raza are: **a)** 18 m; **b)** 19 m; **c)** 21 m; **d)** 17 m.

3. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră punctele A, B, C în această ordine, aşa încât $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CA}$. m($\sphericalangle BAC$) este: **a)** 120°; **b)** 180°; **c)** 30°; **d)** 60°.

4. Raza cercului circumscris unui pătrat cu latura de 6 cm este egală cu: **a)** $3\sqrt{3}$ cm; **b)** 3 cm; **c)** $3\sqrt{2}$ cm; **d)** 6 cm.

5. Raza cercului circumscris unui triunghi echilateral cu latura de 18 cm este egală cu: **a)** 9 cm;. **b)** $3\sqrt{3}$ cm; **c)** $6\sqrt{3}$ cm; **d)** $9\sqrt{3}$ cm .

---

* La fiecare din problemele 1 - 9 numai un răspuns este corect.

6. Apotema unui pătrat cu latura de 8 dm are lungimea: **a)** 4 dm; **b)** 4 m; **c)** $4\sqrt{2}$ dm; **d)** 8 dm .

7. Aria triunghiului echilateral ce are apotema de $2\sqrt{3}$ cm este egală cu: **a)** $36\sqrt{3}$ cm^2; **b)** $12\sqrt{3}$ cm^2; **c)** 12 dm^2; **d)** $24\sqrt{3}$ cm^2.

8. În cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră arcul $\overset{\frown}{AB}$ cu măsura de 120° şi $R = 12$ cm. Lungimea coardei $[AB]$ este: **a)** $12\sqrt{3}$ cm; **b)** 12 cm; **c)** $2\sqrt{3}$ cm; **d)** 24 cm.

9. În cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră arcul $\overset{\frown}{MN}$ ce are măsura de 180° şi $R = 8$ cm. Aria semicercului format este: **a)** 64 π cm^2; **b)** 4π cm^2; **c)** 16π cm^2; **d)** 32π cm^2.

II.10. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 24$ cm şi $BC = 24\sqrt{3}$ cm. Aflaţi raza cercului circumscris şi raza cercului înscris în triunghiul ABC.

11. În cercul $\mathcal{C}(O, R)$ cu raza de 10 cm se consideră coardele paralele $[AB]$ şi $[CD]$ cu lungimile de 12 cm şi, respectiv, 16 cm. Aflaţi aria trapezului cu vârfurile în punctele A, B, C, D.

12. Lungimea razei cercului circumscris unui triunghi echilateral şi a unui pătrat este egală cu 20 cm. Aflaţi raportul ariilor şi apoi, al perimetrelor celor două poligoane regulate.

Clasa a VIII-a

Puncte. Drepte. Plane

Test 94

1. **a)** Dacă unul din picioarele unui taburet cu patru picioare este mai scurt decât celelalte trei (care au aceeaşi lungime), atunci taburetul nu are stabilitate (joacă), dar un taburet cu trei picioare are stabilitate chiar dacă lungimile picioarelor sale nu sunt egale. **b)** Fotograful foloseşte ca suport pentru aparatul de fotografiat un trepied şi nu un dispozitiv cu 4, 5 sau mai multe picioare. De ce? Ce legătură există între aceste fapte şi numărul punctelor necesare pentru a determina un plan?

2. Pe suprafaţa laterală a unui pahar cilindric se pot găsi două puncte încât segmentul determinat de ele să fie conţinut în suprafaţa laterală a paharului? Această suprafaţă este plană? Aceeaşi întrebare pentru o pâlnie (un con) şi pentru o bilă (sferă).

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ (**fig. 2**). Punctele A,C,B' determină un plan reprezentat de triunghiul haşurat. Reprezentaţi în acest fel planele determinate de următoarele triplete de puncte: **1)** D',A,C; **2)**A',D,B; **3)** C',D,B; **4)** B,B',D; **5)** A,C,C'.

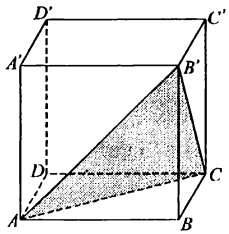


Fig. 2

4. Fiind date 6 puncte distincte A,B,C,D,E,F să se afle: **a)** Numărul minim şi numărul maxim de drepte pe care le pot determina; **b)** Pot determina exact 6 drepte? **c)** Numărul minim şi numărul maxim de plane pe care le pot determina.

5. Fiind date 10 puncte distincte din care exact 9 sunt coplanare, să se afle: **a)** Numărul minim şi numărul maxim de drepte pe care le pot determina. **b)** Numărul minim şi numărul maxim de plane pe care le pot determina. **c)** Pot determina exact 23 de drepte ? **d)** Pot determina exact 10 plane ?

Paralelism în spaţiu

Reţineţi!

Postulatul lui Euclid sau axioma paralelelor. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte trece o dreaptă paralelă cu ea şi numai una.

➲ Două drepte paralele determină un plan.

➲ O dreaptă d poate să nu aibă nici un punct comun cu planul α ($d \cap \alpha = \phi$). În acest caz, vom spune, că dreapta este **paralelă** cu planul α şi notăm $\alpha \parallel d$ sau $d \parallel \alpha$.

➲ O dreaptă paralelă cu o dreaptă dintr-un plan α este paralelă cu planul α (sau conţinută în el).

➲ Dacă o dreaptă a este paralelă cu un plan α, oricare plan β care conţine această dreaptă şi intersectează planul α, o face după o dreaptă b paralelă cu a.

➲ Dacă o dreaptă a este paralelă cu un plan α, paralela la dreapta a dusă printr-un punct A, al planului α, este conţinută în α.

➲ Dacă două drepte paralele a şi b sunt situate, respectiv în două plane α şi β care se intersectează după o dreaptă c, atunci c este paralelă şi cu a şi cu b.

➲ Dacă două drepte distincte a şi b sunt paralele cu a treia dreaptă c, atunci dreptele a şi b sunt paralele între ele (**tranzitivitatea relaţiei de paralelism în spaţiu**).

➲ Dacă un plan conţine două drepte concurente paralele cu un alt plan, atunci cele două plane sunt paralele.

➲ Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente (când sunt amândouă ascuţite sau amândouă obtuze) sau suplementare (când unul din ele este ascuţit, iar celălalt obtuz). Dacă unul este drept, celălalt este de asemenea drept.

➲ Dacă un plan intersectează două plane paralele, intersecţiile sunt drepte paralele.

➲ Două plane distincte, paralele cu al treilea plan sunt paralele între ele (**tranzitivitatea relaţiei de paralelism a planelor**).

➲ Două plane paralele determină pe două drepte paralele, pe care le intersectează, segmente congruente.

Test 95

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ (**fig.2**). **a)** Enumerați cinci perechi de muchii concurente ale cubului; **b)** Găsiți perechile de muchii paralele ale cubului; **c)** Găsiți perechile de muchii necoplanare ale cubului.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: Două drepte sunt paralele dacă: **a)** sunt coplanare şi nu au nici un punct comun; **b)** nu au nici un punct comun; **c)** există o dreaptă care să le intersecteze.

3. Stabiliți care din următoarele propoziții sunt adevărate şi care sunt false: **i)** O dreaptă este paralelă cu un plan dacă: **a)** este paralelă cu orice dreaptă din acel plan; **b)** este paralelă cu două drepte distincte din acel plan; **c)** este paralelă cu o dreaptă din acel plan.

ii) Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci ea este paralelă cu : **a)** orice dreaptă din acel plan; **b)** o dreaptă din acel plan; **c)** o infinitate de drepte din plan; **d)** două drepte concurente din plan.

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ (**fig.2**). Să se precizeze poziția față de planul α (haşurat) a dreptelor: **a)** DC; **b)** AB; **c)** AD; **d)** BC; **e)** $C'D'$; **f)** $B'C'$; **g)** $A'C$; **h)** $A'B$; **i)** AB'.

Test 96

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: **i)** Două plane sunt concurente dacă au: **a)** un punct comun; **b)** trei puncte necoliniare comune; **c)** toate punctele comune. **ii)** Două plane sunt paralele dacă unul din ele conține: **a)** o dreaptă paralelă cu celălalt; **b)** două drepte paralele cu celălalt; **c)** două drepte concurente paralele cu celălalt.

2. Cei patru pereți ai clasei, podeaua şi tavanul reprezintă 6 plane. Alegem unul din aceste plane, de exemplu peretele din față. Să se arate: **a)**toate planele paralele cu el; **b)** toate planele concurente cu el.

3. Două plane pot avea un singur punct comun? Dacă ținem o foaie de hârtie deasupra mesei în aşa fel încât numai un vârf al hârtiei să atingă masa (**fig.3**), se pare că cele două plane (ale foii de hârtie şi al mesei) au un singur punct comun. Este adevărat că ele au numai un singur punct comun ? Care este intersecția lor?

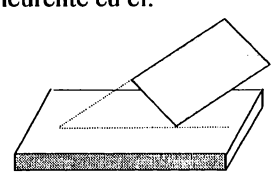


Fig. 3

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ (**fig.2**). **a)** Enumerați trei perechi de plane paralele; **b)** Enumerați patru perechi de plane care au o dreaptă comună; **c)** Este oare suficient ca două plane să fie paralele în aceeași dreaptă, pentru a fi paralele între ele ?

5. Două pătrate $ABCD$ și $MNCD$ au latura CD comună și sunt situate în plane distincte. Demonstrați că dreptele AB și MN sunt paralele.

Test 97

1. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ (**fig. 4**), O și O' sunt centrele feței $ABCD$ și respectiv $A'B'C'D'$.

I. Să se determine măsura unghiului format de dreptele: **a)** AB cu $D'C'$; **b)** AC cu $B'D'$; **c)** AD' cu CC'; **d)** AC cu BC'; **e)** DC cu AC ; **f)** AD' cu BB'; **g)** AB cu $D'B'$; **h)** $D'C$ cu AB; **i)** BB' cu DD'.

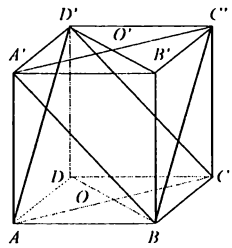


Fig 4

II. Enumerați șase perechi de unghiuri cu laturile respectiv paralele.

2. În **fig. 5**, $ABCD$ este un romb și MBC un triunghi echilateral astfel încât M nu este situat în planul rombului; N este mijlocul laturii BC iar $m(\sphericalangle DCM) = 45°$. Determinați unghiul format de dreptele; **a)** MC și AB; **b)** MN și AD; **c)** MB și AD ; **d)** MC și AD.

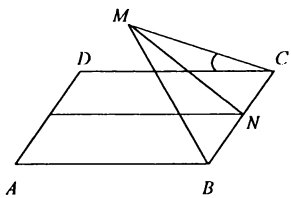


Fig. 5

3. Fie $ABCD$ patru puncte necoplanare și $M \in (AD)$, $P \in (BD)$, $Q \in (CD)$ astfel încât $\frac{MA}{MD} = \frac{3}{2}; \frac{PB}{BD} = \frac{3}{5}; \frac{QD}{DC} = \frac{2}{5}$. Demonstrați că $(MPQ) \parallel (ABC)$.

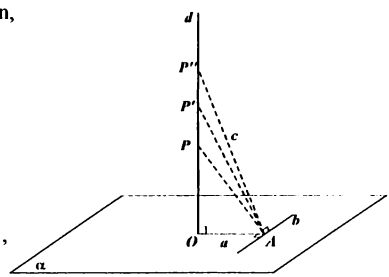
4. Se dau planele $\alpha \parallel \beta$ și un punct $A \notin \alpha$ și $A \notin \beta$. Dreapta d care conține punctul A intersectează planul α în B și planul β în C, astfel încât $AB = 6$ cm și $BC = 10$ cm. În planul β se ia punctul D astfel încât: $CD = 40$ cm. Dacă $AD \cap \alpha = \{E\}$, să se determine lungimea segmentului BE și să se precizeze poziția dreptei BE față de planul β.

Dreaptă perpendiculară pe un plan. Teorema celor trei perpendiculare (T.3⊥.). Distanța de la un punct la o dreaptă

Reținеți!

- Două drepte a și b în spațiu se numesc **perpendiculare** dacă dreptele paralele duse printr-un punct M din spațiu la ele sunt perpendiculare.
- O dreaptă este **perpendiculară pe un plan** dacă este perpendiculară pe două drepte neparalele conținute în acel plan.
- O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă conținută în acel plan.
- Dintr-un punct M se poate duce, pe un plan, o perpendiculară și numai una.
- Dintr-un punct M se poate duce, pe o dreaptă, un plan perpendicular și numai unul.
- Dacă $a \perp \alpha$ și $b \perp \alpha$, atunci $a \parallel b$.
- Dacă $\alpha \perp d$ și $\beta \perp d$, atunci $\alpha \parallel \beta$.
- ***(Teorema celor trei perpendiculare. T. 3⊥)***

Dacă $d \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \perp b$, $a \cap b = \{A\}$, $d \cap \alpha = \{O\}$, $c = PA$, $P \in d$, atunci $c \perp b$.



Observație: *Notăm distanța de la punctul M la dreapta a cu d(M,a).*

Test 98

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă: **a)** este perpendiculară pe o dreaptă din acel plan; **b)** este perpendiculară pe două drepte din acel plan; **c)** este perpendiculară pe două drepte neparalele conținute în acel plan.

2. Pe o față a unui cub se duce o dreaptă oarecare. Câte fețe ale cubului sunt paralele cu dreapta dată ? Dar perpendiculare ?

3. Fie pătratul $ABCD$ de latură 10 cm. Se duce $MA \perp (ABC)$ astfel încât $MA = 10\sqrt{2}$ cm. Calculați distanțele MC, MB și aria triunghiului MBD.

4. Pe planul paralelogramului $ABCD$, de aceeași parte a planului lui se duc perpendicularele AA', BB', CC', DD' astfel încât: $BB'=10$ cm, $DD'=4$ cm, $CC'=8$ cm, $AA'=6$ cm. Arătați că: **a)** $AA' \parallel BB'$; **b)** punctele A', B', C', D' sunt coplanare.

5. Fie triunghiul echilateral ABC și M un punct egal depărtat de vârfurile triunghiului. Arătați că: $MA \perp BC$; $MB \perp AC$ și $MC \perp AB$.

Test 99

1. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara AM. Știind că: AB=10 cm și d(M,BC)=$10\sqrt{2}$ cm, calculați: d(M,CD), d(M,AB), d(M,AD) și d(M,BD).

2. Pe planul triunghiului isoscel ABC se ridică perpendiculara MO, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului. Știind că: OM = $= 3\sqrt{2}$ cm, $AB = AC = 15$ cm și $BC = 18$ cm, să se calculeze distanța de la punctul M la laturile triunghiului.

3. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara AM.

a) Știind că: $AM = BC = 6$ cm și $AB = 8$ cm, calculați distanța de la punctul M la laturile dreptunghiului.

b) Dacă d(M, BC) = $\sqrt{34}$ cm; $MC = 5\sqrt{2}$ cm și d(M, DC) = $\sqrt{41}$, calculați lungimile laturilor dreptunghiului precum și d(M, AC) și d(M, BD).

4. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, se știe că $AD = DC = BC = 10$ cm și $AB = 20$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara pe planul trapezului pe care se ia punctul M cu $AM = 10\sqrt{3}$ cm. Aflați distanța de la M la laturile și diagonalele trapezului.

Test 100

1. În vârful A al pătratului $ABCD$ de latură 4 cm se ridică perpendiculara AM pe planul lui pe care se ia punctul M astfel încât $AM = 4$ cm. Dacă P este mijlocul lui (MD) să se arate că:

a) $MB \parallel (PAC)$; **b)** $AP \perp (MCD)$; **c)** calculați aria triunghiului MBC.

2. Pe planul rombului $ABCD$ se ridică perpendiculara AM. Știind că $AB = AM = 10$ cm și m($\sphericalangle BAD$) = 60°, să se calculeze distanța de la M la dreptele BC, CD și BD.

3. Pe planul pătratului $ABCD$ se consideră perpendiculara MB ($AB = MB = \sqrt{3}$ cm). Fie $E \in (AD)$ astfel încât $DE = 1$ cm.

a) Arătați că $AC \perp MD$. **b)** Aflați $d(AC,MD)$ și $d(M,EC)$.

4. Trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB > CD$, $AB \parallel CD$ are măsurile unghiurilor ascuțite de 60° și $AD = DC = BC = a$. Se duce $AP \perp (ABC)$ și se ia $AP = a$. Calculați: $d(P,BC)$; $d(P,BD)$ și $d(P,CD)$.

5. Trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB > CD$ are măsura unghiului ascuțit de 60°, iar diagonalele sunt perpendiculare pe laturile neparalele. Se duce $AM \perp (ABC)$. Știind că $BC = 10$ cm și $AM = 15$ cm, aflați: $d(M,BC)$; $d(M,DB)$; $d(M,DC)$;

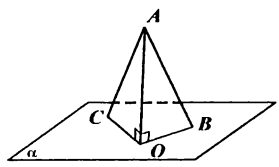
Proiecții ortogonale pe un plan. Oblice. Distanța de la un punct la un plan. Unghiul unei drepte cu un plan

Rețineți!

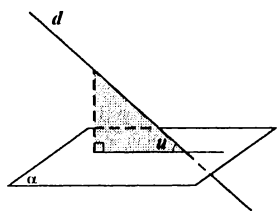
➲ Perpendiculara dintr-un punct pe un plan este mai scurtă decât orice oblică dusă din același punct la plan.

➲ Două oblice duse din același punct pe un plan sunt congruente, dacă și numai dacă, picioarele lor sunt egal depărtate de piciorul perpendicularei.

➲ Prin distanța de la punctul A la planul α, înțelegem lungimea AO, unde $O \in \alpha$ este piciorul perpendicularei duse din A pe α. Notăm distanța de la punctul M la planul (ABC) cu $d(M,(ABC))$.



➲ Fie α și β două plane paralele. Distanța de la punctele $M \in \alpha$ la planul β este **constantă**. Această constantă se numește **distanța** între planele α și β.



➲ **Proiecția ortogonală** a unui punct A pe un plan este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe plan.

➲ Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

➲ **Unghiul unei drepte cu un plan** este unghiul format de acea dreaptă cu proiecția ei pe acel plan (dacă dreapta nu este perpendiculară pe plan).

➲ Lungimea proiecției unui segment pe un plan α este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și cosinusul unghiului format de dreapta suport a segmentului dat și planul α.

Test 101

1. Fie planul α și punctul $P \notin \alpha$ iar punctele A, B, C aparțin planului α. Dacă $OP \perp \alpha$ ($O \in \alpha$), $PB = 6\sqrt{2}$ cm, $PA = 10$ cm; $OA = 8$ cm; $PC = 8$ cm și $OA \perp OB$, calculați $d(P, AB)$ și lungimea segmentelor OB și OC.

2. Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D în această ordine și proiecțiile lor pe planul α, le notăm cu A', B', C' și, respectiv, D'. **a)** Se dă: $AB = 10$ cm, $A'B' = 4$ cm, $CD = 8$ cm, $BC = 6$ cm; aflați $C'D'$ și $B'C'$.
b) Se dă $A'B' = 6$ cm, $C'D' = 9$ cm și $CD = 15$ cm, aflați AB.

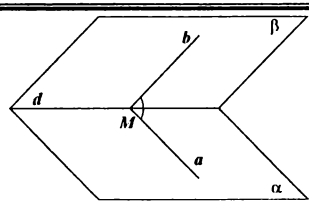
3. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică de aceeași parte a planului perpendicularele AA', BB', CC' și DD' astfel încât: $AA' = BB' = CC' = DD' = AB$. Să se afle tangenta unghiului format de: **a)** AC' cu planele (ADD'), $(A'B'C')$ și $(BB'D)$; **b)** AD' cu planele $(BB'D)$ și (DCC').

4. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D . **a)** Arătați că orice plan care trece prin mijlocul segmentului AB este egal depărtat de punctele A și B. **b)** Câte plane există egal depărtate de cele patru puncte ?

5. Fie $ABCD$ un paralelogram și α un plan ce conține diagonala (BD) a paralelogramului dat. Dacă M și N sunt respectiv, proiecțiile punctelor A și C pe planul α, arătați că $(AM) \equiv (CN)$.

Unghi diedru. Plane perpendiculare

Rețineți!



➲ Numim **unghi diedru**, figura formată de două semiplane α și β mărginite de aceeași dreaptă d.

➲ Numim **unghi plan al unghiului diedru**, unghiul format de două semidrepte a, b ambele având originea într-un punct $M \in d$, conținute respectiv în cele două semiplane ce formează diedrul, și perpendiculare pe d.

➲ Două plane α și β sunt perpendiculare dacă unghiul plan al diedrului format de ele are măsura de 90° (notăm $\alpha \perp \beta$).

➲ $\alpha \perp \beta$ dacă există dreapta d astfel încât $d \subset \alpha$ și $d \perp \beta$.

Teoremă (Teorema planelor perpendiculare). Dacă $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = d, g \subset \alpha, g \perp d$, atunci $g \perp \beta$.

Test 102

1. Pe planul pătratului $ABCD$ de latură a se ridică de aceeași parte a planului perpendicularele AA', BB', CC' și DD' astfel încât $AA' = BB' = CC' = DD' = a$. Determinați tangenta unghiului diedru format de planul (ACD') cu planele: (ADD'), (BCB'), (ABC), $(A'BC')$. $(BB'D)$ și $(AB'C)$.

2. Pe planul triunghiului isoscel ABC, $AB = AC = 26$ cm și $BC = 20$ cm, se ridică perpendiculara AM cu $AM = 24\sqrt{3}$. Aflați: **a)** $d(M, BC)$; **b)** $d(A, (MBC))$; **c)** măsura unghiului diedru format de planele (MBC) și (ABC).

3. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu $AB = 12$ cm și $AD = 4$ cm se ridică perpendiculara AM astfel încât $AM = 4\sqrt{3}$ cm. Aflați: **a)** $d(M, BC)$, $d(M, DC)$, $d(M, AC)$, $d(M, BD)$, $d(A, (MBD))$. **b)** $m(\sphericalangle(MDC), (ABC))$ și $m(\sphericalangle(MBC), (ABC))$.

4. Trapezul isoscel $ABCD$, $AB \| CD$ are $AB=2a$, $AD=BC=CD=a$. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara AM astfel încât $AM=a$. Să se afle: **a)** $d(M, BC)$, $d(M, DC)$, $d(M, BD)$, $d(A, (MBC))$. **b)** $m(\sphericalangle((ABC), (MBC)))$; $m(\sphericalangle((ABC), (MDB)))$ şi tangenta unghiului diedru format de planele (MDC) şi (ABC).

Test 103

1. O foaie de carton dreptunghiulară $ABCD$, în care $BC = 20$ cm, o aşezăm astfel încât latura AB să fie conţinută în planul mesei şi distanţa de la vârful C la planul mesei să fie de 10 cm. Aflaţi unghiul format de planul cartonului şi planul mesei.

2. Fie planul α şi dreptele d_1 şi d_2 care îndeplinesc următoarele condiţii: $d_1 \cap \alpha = \{A\}$; $d_2 \cap \alpha = \{B\}$; $AB = a$; $m(\sphericalangle(d_1,\alpha)) = 30°$; $m(\sphericalangle(d_2,, \alpha)) = 45°$; $d_1 \cap d_2 = \{M\}$; $d_1 \perp d_2$. Aflaţi: **a)** aria proiecţiei ortogonale a triunghiului AMB pe planul α ; **b)** măsura unghiului diedru format de planul triunghiului AMB şi planul α.

3. Se dă triunghiul ABC având laturile $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 15$ cm. Latura $[BC]$ este inclusă în planul α , iar proiecţia triunghiului ABC pe planul α este un triunghi dreptunghic. Să se afle tangenta unghiului diedru format de planul triunghiului şi planul α .

4. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O,10)$. Măsurile arcelor $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{BC}$ sunt direct proporţionale cu numerele 12,16,20. În punctul A se ridică perpendiculara AP pe planul triunghiului, astfel încât $AP = 5$ cm. Aflaţi: **a)** măsura unghiurilor triunghiului ABC; **b)** aria triunghiului PBC; **c)** $d(A,(PBC))$; **d)** tangenta unghiului format de planele (PBC) şi (ABC).

Test 104

1. Se consideră un plan α şi un punct oarecare A. Arătaţi că toate planele care conţin punctul A şi sunt perpendiculare pe α au o dreaptă comună.

2. O foaie de carton pătrată $ABCD$ cu diagonala de 12 cm se îndoaie după diagonala BD astfel încât $(BCD) \perp (ABD)$. **a)** Aflaţi $d(A,C)$. **b)** Arătaţi că ΔACD este echilateral.

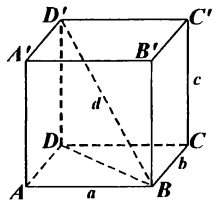
3. Fie pătratele $ABCD$ şi $ABMN$ astfel încât $(ABC) \perp (ABM)$. Dacă O este centrul pătratului $ABMN$ şi $AB = 10$ cm, determinaţi $d(O,BD)$.

4. Un romb $ABCD$ cu $m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$ şi un pătrat $ABGH$ sunt incluse în plane perpendiculare. Ştiind că $AB = 8$ cm, aflaţi: **a)** $d(H, BD)$; **b)** $d(H, CD)$; **c)** sinusul unghiului format de planele (ABC) şi (HBD).

5. Se dă triunghiul dreptunghic ABC, în care $AB = AC = a$. În C pe planul triunghiului ABC, se ridică perpendiculara CD, cu $CD = a\sqrt{3}$. Fie P şi Q mijloacele segmentelor (BD), respectiv (BC). **a)** Aflaţi distanţa de la D la AB. **b)** Arătaţi că $(ABD) \perp (ACD)$. **c)** Demonstraţi că triunghiul APC este isoscel şi determinaţi măsura unghiului dintre planele (ABC) şi (APC). **d)** Demonstraţi că $AQ \perp PC$.

Paralelipipedul dreptunghic. Prisma dreaptă cu baza un pătrat (patrulateră regulată)

$\mathcal{A}_l = 2ac + 2bc$; $\mathcal{A}_t = 2ab + 2ac + 2bc$; $\mathcal{V} = abc$;
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\,\mathcal{A}_b$



Test 105

1. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 16$ cm; $BC = 8$ cm şi $CC' = 16\sqrt{3}$ cm. O furnică pleacă din A şi ajunge în A' pe drumul cel mai scurt parcurgând toate feţele laterale ale paralelipipedului. Se cere: **a)** să se desfăşoare pe un plan paralelipipedul; **b)** să se traseze lungimea drumului furnicii şi calculaţi lungimea acestuia; **c)** să se determine măsurile unghiurilor sub care drumul furnicii taie muchiile laterale; **d)** să se afle aria laterală, aria totală, volumul şi diagonala paralelipipedului.

2. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Ştiind că: $AB = 2\sqrt{5}$ cm; $BC = 3\sqrt{2}$ cm şi $AA' = 4\sqrt{10}$ cm, calculaţi aria totală, volumul şi diagonala paralelipipedului.

3. Aflaţi aria totală şi diagonala unui paralelipiped dreptunghic ştiind că dimensiunile lui sunt direct proporţionale cu numerele 6; 8 şi 24, iar volumul său este 144 cm^3.

4. Determinaţi diagonala şi volumul unui paralelipiped dreptunghic ştiind că dimensiunile sale sunt invers proporţionale cu numerele 20, 30, 40, iar suma lor este 130 cm.

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipiped dreptunghic. Ştiind că: $AB = 30$ cm, BC=40 cm şi $AA' = 120$ cm, determinaţi: **a)** lungimea diagonalei sale; **b)** distanţa dintre dreptele AA' şi $B'C'$; **c)** distanţa de la punctul A la diagonala BD'.

Test 106

1. Într-o prismă patrulateră regulată notăm: latura bazei cu a, înălţimea cu h. **a)** Se dă: $\mathcal{A}_l = 360$ cm^2, $a = 3$ cm, calculaţi h şi $\mathcal{V}$. **b)** Se dă: $\mathcal{V}$= =198 dm^3 şi $a = 3$ dm, calculaţi $\mathcal{A}_l$ şi $\mathcal{A}_t$. **c)** Se dă: diagonala prismei = = 26 cm şi $h = 24$ cm, calculaţi $\mathcal{A}_l$ şi $\mathcal{V}$. **d)** Diagonala prismei = 17 cm; diagonala unei feţe laterale = 15 cm. Calculaţi $\mathcal{A}_l$ şi $\mathcal{V}$.

2. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 28$ cm, $BC = CC' = 20$ cm. O muscă porneşte din A, merge pe toate feţele laterale ale cutiei şi ajunge în A'. Să se afle: **a)** lungimea minimă a drumului; **b)** cosinusul unghiului pe care trebuie să-l formeze drumul la pornire cu muchia AB pentru a fi cel mai scurt.

3. Un bazin de înot are lungimea de 15 m şi lăţimea de 6 m. În urma unei ploi torenţiale nivelul apei a crescut cu 45 cm. Câţi hectolitri de apă s-au acumulat?

4. Un paralelipiped dreptunghic are sumele ariilor a câte două feţe alăturate proporţionale cu numerele: 17,5; 16 şi 13,5. Ştiind că aria totală a paralelipipedului este 94 m^2, să se determine volumul şi diagonala paralelipipedului.

Test 107

1. Într-un paralelipiped dreptunghic diagonalele feţelor au lungimile: $\sqrt{34}$ m; $\sqrt{41}$ m şi 5 m. Calculaţi diagonala şi volumul paralelipipedului.

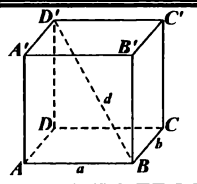
2. O prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are latura bazei de 10 cm şi m($\sphericalangle CA'A$) = 45°. Aflaţi: **a)** aria totală şi volumul prismei; **b)** distanţa de la punctul B la dreapta $A'D$; **c)** distanţa de la punctul A la planul $(A'BD)$.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Dacă $AB = 3\sqrt{2}$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm şi distanţa dintre proiecţiile vârfurilor A şi C pe diagonala $[DB']$ este 1 cm, calculaţi aria totală şi volumul paralelipipedului.

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 40$ cm, $BC = 15$ cm, $AA' = 48$ cm. Fie M şi N mijloacele muchiilor AB şi CC'. Aflaţi măsura unghiului diedru al planelor (DMN) şi (ABC).

Cubul

$\mathcal{A}_l = 6a^2$, $\mathcal{V} = a^3$; $d = a\sqrt{3}$



Test 108

1. Aflați aria și volumul unui cub știind că diagonala lui este:

a) $6\sqrt{3}$ cm; **b)** $(3x-2)$ cm, unde $x \in \mathbb{R}$ cu $x > \frac{2}{3}$.

2. Se dau două cuburi. Muchia unuia este cât diagonala celuilalt. Aflați raportul volumelor.

3. Aflați aria totală și volumul unui cub știind că diferența dintre lungimea diagonalei sale și lungimea diagonalei unei fețe este $\frac{\sqrt{675}-\sqrt{450}}{2}$ cm.

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Știind că distanța de la vârful D' la dreapta $B'C$ este $12\sqrt{6}$ cm, aflați aria și volumul cubului.

5. Să se arate că dacă între lungimile diagonalelor fețelor d_1, d_2, d_3 ale unui paralelipiped dreptunghic și diagonala lui, d, există relația $d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1 = 2d^2$, atunci paralelipipedul este cub.

Test 109

1. Aflați aria și volumul unui cub știind că: **a)** diagonala cubului este de $4\sqrt{3}$ cm; **b)** diagonala unei fețe este de $5\sqrt{2}$ cm.

2. Știind că distanța dintre mijloacele unei diagonale a unui cub și o diagonală a unei fețe laterale este de 3 cm, aflați aria și volumul cubului.

3. Să se demonstreze că dacă într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ există relația: aria totală $= AC^2 + AB'^2 + AD'^2$, atunci paralelipipedul dreptunghic este cub.

4. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a. **a)** Calculați distanțele de la vârfurile B, A' și D la diagonala AC'. **b)** Arătați că segmentele determinate de aceste distanțe sunt concurente într-un punct M și $\frac{MA}{MC'} = \frac{1}{2}$.

c) Arătați că diagonala AC' formează cu fețele cubului unghiuri congruente. **d)** Determinați măsura unghiului format de dreptele AD' și CD'.

Test 110

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi M mijlocul muchiei AB, iar N centrul feţei $BCC'B'$. Să se arate că: **a)** $D'N \perp (MCB')$; **b)** $AC' \parallel (MCB')$.

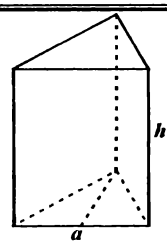
2. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi N mijlocul segmentului $(D'C)$, iar M mijlocul lui (AB). **a)** Arătaţi că $AN \perp D'C$. **b)** Dacă $AN = 2\sqrt{6}$ cm, determinaţi aria şi volumul cubului. **c)** Dacă aria triunghiului NAB este egală cu $9\sqrt{5}$ cm^2, calculaţi aria şi volumul cubului precum şi aria triunghiului ANC.

3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ şi M, N, P mijloacele muchiilor AB, CC', $A'D'$. Să se arate că dacă triunghiul MNP este echilateral, atunci paralelipipedul dat este cub.

4. Se dă un cub cu muchia de 1 cm. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puţin două dintre ele au distanţa mai mică sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

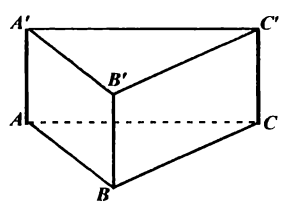
Prisma triunghiulară regulată

$\mathcal{A}_l = P_b \cdot h$; $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$; $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$.



Test 111

1. Prisma dreaptă din **figura alăturată** are baza triunghi echilateral de latură $AB = 12$ cm şi înălţimea $AA' = 5$ cm.



a) Perimetrul bazei este egal cu ... cm.
b) Aria bazei este egală cu ... cm^2.
c) Volumul prismei este egal cu ... cm^3.

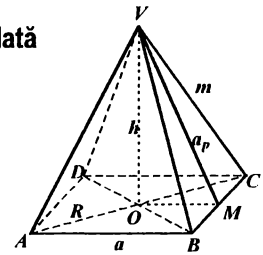
2. O prismă triunghiulară regulată are latura bazei de 10 cm şi înălţimea de 8 cm. Calculaţi: **a)** aria laterală şi aria totală a prismei; **b)** volumul prismei; **c)** lungimea diagonalei unei feţe laterale.

3. O prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei de 6 cm. Știind că dreptele AB' și BC' formează un unghi cu măsura de 60°, calculați aria totală și volumul prismei.

4. Aria totală a unei prisme triunghiulare regulate $ABCA'B'C'$ este egală cu $72\sqrt{3}$ cm^2. Știind că distanța de la centrul O al fetei $ABB'A'$ la planul (BCC') este egală cu 3 cm, determinați volumul prismei.

Piramida patrulateră regulată

$$\mathcal{A}_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2};\ \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b;\ \mathcal{V} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$



Test 112

1. În tabelul de mai jos, a, h, m, a_p, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$ reprezintă respectiv: latura bazei, înălțimea, muchia, apotema, aria laterală, aria totală și volumul unei piramide patrulatere regulate. Completați tabelul.

	a	h	m	a_p	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
a)	10	12					
b)			$\sqrt{1241}$	29			
c)	30				1500		
d)	12						384

(Unitățile de lungime, arie și volum sunt corespunzătoare)

Test 113

1. Într-o piramidă patrulateră regulată unghiul format de o față laterală cu planul bazei este de 60°, iar latura bazei este de 8 cm. Aflați: **a)** aria totală și volumul piramidei; **b)** sinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei; **c)** distanța de la centrul bazei la o față laterală; **d)** distanța de la un vârf al bazei la fața laterală opusă.

2. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are înălțimea de 4 cm iar raportul dintre aria totală și volumul piramidei este 2. Aflați: **a)** volumul și aria totală a piramidei; **b)** cosinusul unghiului format de o față laterală cu planul bazei; **c)** distanța de la punctul C la planul (VAB).

3. Se dă piramida patrulateră regulată $SABCD$. Știind că: $AB = 6\sqrt{2}$ cm și distanța dintre dreptele AC și SB este $OM = 2\sqrt{3}$ cm, unde $OM \perp SB$, $M \in SB$

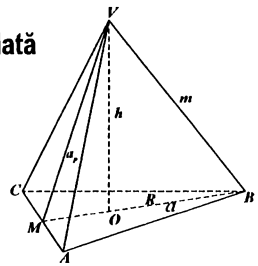
şi O centrul bazei piramidei, aflaţi: **a)** aria şi volumul piramidei; **b)** măsura unghiului diedru format de planele a două feţe alăturate ale piramidei.

4. Un bazin sub formă de cub este plin cu apă. Se introduce în el un vas sub formă de piramidă patrulateră regulată cu baza congruentă cu una din feţele bazinului şi vârful situat în centrul feţei opuse acesteia. Cât la sută din volumul apei s-a eliminat?

Piramida triunghiulară regulată

$a = R\sqrt{3}$; $\mathcal{A}_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $\mathcal{A}_b = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$;

$\mathcal{A}_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$; $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$; $\mathcal{V} = \frac{A_b \cdot h}{3}$.



Test 114

1. În tabelul de mai jos a, h, m, a_p, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ şi $\mathcal{V}$ reprezintă respectiv: latura bazei, înălţimea, muchia, apotema, aria laterală, aria totală şi volumul unei piramide triunghiulare regulate. Completaţi tabelul.

	a	h	m	a_p	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
a)	30	10					
b)			25	20			
c)	16				480		
d)	$12\sqrt{3}$						$360\sqrt{3}$

(Unităţile de lungime, arie şi volum sunt corespunzătoare)

Test 115

1. O piramidă triunghiulară regulată are înălţimea de $5\sqrt{3}$ cm şi latura bazei de $10\sqrt{3}$ cm. Calculaţi: **a)** aria totală şi volumul piramidei; **b)** măsura unghiului diedru format de o faţă laterală cu planul bazei; **c)** distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală; **d)** tangenta unghiului format de muchia laterală cu planul bazei.

2. Să se afle distanţa dintre centrele de greutate a două feţe laterale ale unei piramide triunghiulare regulate, ştiind că muchia bazei are lungimea a.

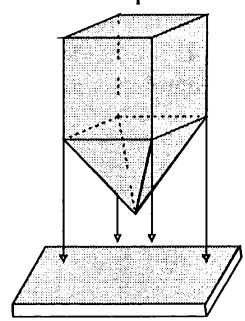
3. O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are muchia laterală egală cu $10\sqrt{3}$ cm şi latura bazei egală cu 15 cm. Aflaţi: **a)** măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei; **b)** distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală; **c)** determinaţi poziţia punctului M de pe muchia $[VA]$ astfel încât aria triunghiului MBC să fie minimă şi calculaţi acest minim.

4. Într-o piramidă triunghiulară regulată raza cercului circumscris bazei este egală cu $3\sqrt{3}$ cm, iar măsura unghiului format de muchia laterală cu planul bazei este egală cu 60°. Aflați: **a)** volumul și aria totală a piramidei; **b)** distanța de la un vârf al bazei la fața laterală opusă acestuia și distanța de la centrul bazei la o față laterală a piramidei; **c)** sinusul unghiului format de două fețe laterale ale piramidei; **d)** la ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu ea astfel încât volumul piramidei mici formate să fie o optime din volumul piramidei inițiale; **e)** cât la sută reprezintă aria laterală a piramidei mici din aria laterală a piramidei inițiale?

5. Tatăl lui Andrei, pentru a uda legumele din grădină, construiește un rezervor cu forma și dimensiunile din figura alăturată (partea de jos a rezervorului este o piramidă patrulateră regulată cu înălțimea de 60 cm, iar partea de sus este o prismă patrulateră regulată, cu latura bazei de 120 cm și înălțimea de 40 cm. Partea superioară a rezervorului are un capac.

a) Aflați pentru câte zile ajunge apa din rezervorul plin, dacă într-o zi consumă 432 l de apă.

b) Tatăl lui Andrei vopsește suprafața exterioară a rezervorului și capacul. Știind că pentru acoperirea unui metru pătrat sunt necesare 500 g de vopsea, aflați câți lei a costat vopseaua folosită dacă un kilogram de vopsea costă 20 lei. ($\sqrt{2} \simeq 1{,}41$). Aproximați cu $\frac{1}{100}$ prin lipsă.



Tetraedrul regulat

Test 116

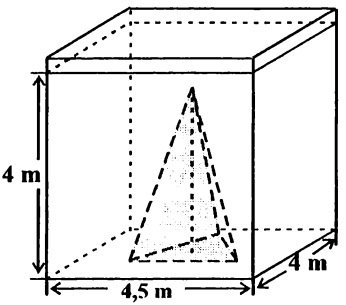
1. O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are înălțimea de $4\sqrt{6}$ cm și apotema de $6\sqrt{3}$ cm. Aflați: **a)** aria totală și volumul piramidei; **b)** tangenta unghiului format de o față laterală cu planul bazei; **c)** la ce distanță de vârf luăm pe înălțimea piramidei punctul P astfel încât ΔVPB să fie isoscel cu baza VB?

2. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia a. Determinați tetraedrele regulate ale căror vârfuri coincid cu vârfurile cubului dat și aflați volumul acestor tetraedre.

3. Aflați lungimea muchiei unui tetraedru regulat în care aria totală și volumul se exprimă prin același număr de unități.

4. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat şi punctul M pe înălţimea DO a tetraedrului astfel încât $OD = 2\sqrt{3}\ OM$. Să se determine aria totală şi volumul tetraedrului ştiind că $AM = \frac{\sqrt{14}}{3}$ cm.

5. Figura alăturată reprezintă schematic un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic. În bazin se introduce o statuie din bronz în formă de tetraedru regulat cu înălţimea de 3 m. Ştiind că dimensiunile fundului bazinului sunt de 4 m şi 4,5 m, iar înălţimea apei din bazin este de 4 m, aflaţi:



a) Câte kilograme de vopsea sunt necesare pentru a vopsi statuia dacă pentru 1 m^2 din suprafaţa sa sunt necesare 400 g de vopsea? ($\sqrt{3} \simeq 1{,}73$)

b) Câţi centimetri se ridică nivelul apei din bazin după introducerea statuii? Aproximaţi la nivelul sutimilor prin adaos.

CAPITOLUL II
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

Test 117 *)

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.**

SUBIECTUL I. (30 de puncte)
Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $64 : 8 + 8$ este egal cu ... . (5 p)

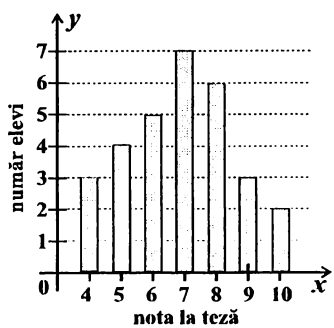
2. Fie mulțimile $A = \{-2; 1; 2; 4\}$ și $B = \{0; 4\}$. Mulțimea $A \cap B = \{...\}$. (5 p)

3. Într-o urnă sunt 11 bile negre și 18 bile albe. Se extrage o bilă. Probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră este egală cu ... . (5 p)

4. Diametrul unui cerc este de 4 m. Lungimea razei cercului este egală cu ... m. (5 p)

5. Aria totală a unui cub este egală cu 150 dm^2. Muchia acestui cub este de ... dm. (5 p)

6. Toți elevii unei clase au susținut teza la matematică. Rezultatele obținute sunt reprezentate în graficul de mai jos. Conform graficului, clasa are un număr de ... elevi. (5 p)



SUBIECTUL al II-lea. (30 de puncte)
Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf S și de bază $ABCD$. (5 p)

2. Într-o bibliotecă, pe un raft, se află 24 de cărți, iar pe alt raft se află de două ori mai multe cărți. Câte cărți se află, în total, pe cele două rafturi? (5 p)

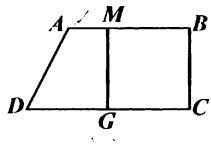
3. Într-o pungă sunt bomboane. Dacă bomboanele se împart în mod egal unui grup de 4 copii, atunci rămân în pungă 3 bomboane. Dacă bomboanele se împart în mod egal unui grup de 7 copii, atunci rămân în pungă 6 bomboane.

---

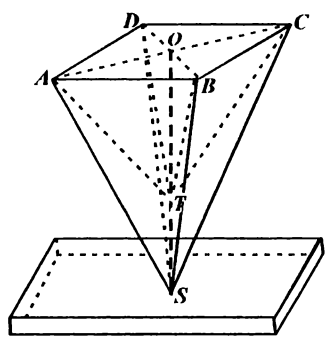
*) Modelul elaborat de Consiliul Național de Evaluare și Examinare – noiembrie 2010.

a) Verificați dacă în pungă pot fi 55 de bomboane. (5 p)
b) Care poate fi cel mai mic număr de bomboane din pungă, înainte ca acestea să fie împărțite copiilor? (5 p)
4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x - 5$. Verificați dacă punctele $P(0; 5)$ și $Q(5; 0)$ aparțin graficului funcției f. (5 p)
5. Arătați că $(x + 2)^3 - x - 2 = (x + 1)(x + 3)(x + 3)$, pentru orice x număr real. (5 p)

SUBIECTUL al III-lea. (30 de puncte)
Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.



1. În figura alăturată sunt ilustrate schematic pardoseala unui salon $AMGD$ și pardoseala unei camere de zi $MBCG$. $AB = 6$ m, $BC = 5$ m, $CD = 10$ m, M este un punct situat pe segmentul (AB), $AM = x$. (x este o distanță exprimată în metri; $0 < x < 6$).
a) Exprimați, în funcție de x, aria pardoselii camerei de zi $MBCG$; (5 p)
b) Arătați că aria pardoselii salonului $AMGD$ este egală cu $5(x + 2)$ m^2. (5 p)
c) Pentru ce valoare reală a lui x aria pardoselii salonului $AMGD$ este egală cu aria pardoselii camerei de zi $MBGD$? (5 p)
d) Se consideră $AM = 2$ m. O persoană cumpără gresie pentru salonul $AMGD$. Un metru pătrat de gresie costă 80 de lei. Pentru fiecare metru pătrat de gresie se acordă o reducere de 5% oricărei persoane care cumpără mai mult de 10 m^2. Toată gresia cumpărată pentru salon are suprafața mai mare cu un metru pătrat decât suprafața salonului. Cât a costat în total gresia pentru salonul $AMGD$? (5 p)



2. Figura alăturată reprezintă schematic o fântână săpată în piatră - $SABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, de înălțime $SO = 9$ dm, în care este săpată o piramidă patrulateră regulată $TABCD$ corespunzătoare unui bazin plin cu apă. $ST = 3$ dm, iar baza $ABCD$ este un pătrat de latură $AB = 6$ dm.
a) Calculati aria totală a piramidei $SABCD$, în care este săpată fântâna. (5 p)
b) Verificați dacă în bazinul $TABCD$ pot intra 70 de litri de apă. (5 p)

Test 118
(Evaluarea națională, an școlar 2009 - 2010)

Subiectul I. Pe foaia de teză scrieți numai rezultatele. **(30 puncte)**

1. Rezultatul calculului $2 + 4 : 2$ este egal cu ... . (5p)

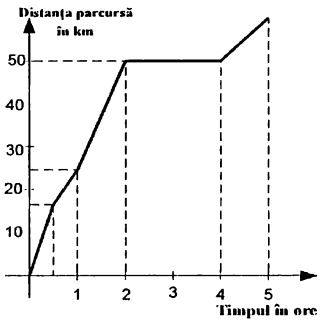
2. Media aritmetică a numerelor 2 și 8 este egală cu ... . (5p)

3. Dacă $A = \{1; 2; 3\}$ și $B = \{3; 4\}$, atunci mulțimea $A \cap B$ este egală cu $\{..\}$. (5p)

4. Un triunghi echilateral are latura de 4 m. Aria triunghiului este egală cu ... m^2. (5p)

5. O prismă dreaptă are ca baze triunghiurile echila-terale ABC, respectiv $A'B'C'$. Măsura unghiului dintre dreptele AB și $B'C'$ este egală cu ...°. (5p)

6. Figura alăturată reprezintă graficul deplasării unui vehicul pe parcursul a 5 ore. În această perioadă, vehicului staționează timp de ... ore. (5p)



Subiectul II. Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf S și bază ABC. (5p)

2. Un elev cumpără 10 cărți, de literatură și de matematică. El plătește 9 lei pentru o carte de literatură și 7 lei pentru o carte de matematică, cheltuind astfel 76 lei. Câte cărți de matematică a cumpărat elevul? (5p)

3. O persoană are o sumă S de bani. În prima zi cheltuiete 30% din suma S, a doua zi cheltuiete 40% din suma S, iar a treia zi cheltuiete $\frac{1}{4}$ din suma S.

a) În ce zi cheltuiește cel mai puțin persoana respectivă? (5p)

b) Persoanei îi rămân 100 de lei după cele 3 zile. Determinați valoarea sumei S. (5p)

4. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$. (5p)

5. Arătați că numărul $p = \left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) - \sqrt{5}\left(\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)$ este natural. (5p)

Subiectul III. Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete. (30 puncte)

1. Figura 1 reprezintă schița unui bazin în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Baza $ABCD$ are $AB = 12$ m și $BC = 4$ m, iar înălțimea paralelipipedului este $AA' = 3$m.

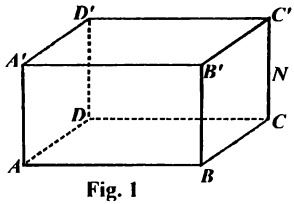


Fig. 1

a) Calculați distanța dintre punctele A și C'.(5p)

b) Calculați aria laterală a bazinului. (5p)

c) În bazin se află 96000 litri de apă. Calculați înălțimea la care se ridică apa în bazin. (5p)

2. Figura 2 reprezintă schița unui patinoar format dintr-un dreptunghi $MNPQ$ care are lungimea MN de 40 m și lățimea de 30 m și din două semicercuri de diametre $[MQ]$, respectiv $[NP]$.

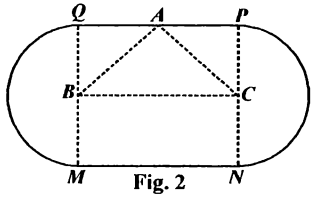


Fig. 2

a) Patinoarul este înconjurat de un gard. Calculați lungimea gardului care înconjoară patinoarul. (5p)

b) Verificați dacă aria patinoarului este mai mică decât 2000 m^2.
$(3{,}14 < \pi < 3{,}15)$ (5p)

c) Un patinator parcurge distanțele AB, BC și CA. Punctele B și C sunt mijloacele segmentelor $[MQ]$, respectiv $[NP]$ și A este mijlocul segmentului $[PQ]$. Calculați valoarea sinusului unghiului ABC. (5p)

Test 119

(Evaluarea națională, an școlar 2009 - 2010, etapa a II-a)

SUBIECTUL I. (30 de puncte)

Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $624 : 3$ este egal cu .... (5 p)

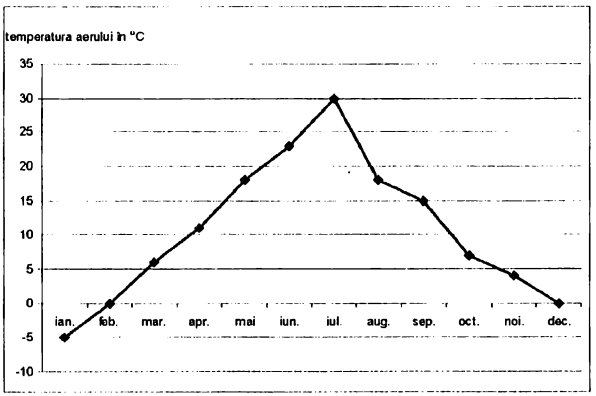
2. Inversul numărului $\frac{2}{3}$ este egal cu ... (5 p)

3. Fie mulțime $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$. Scrisă sub formă de interval mulțimea A este egală cu ... (5 p)

4. Un romb $ABCD$ are diagonalele $AC = 5$ cm și $BD = 4$ cm. Aria rombului este egală cu ... cm^2. (5 p)

5. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C'$. Dacă $AB = AA' = 4$ m, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor prismei este egală cu ... m. (5 p)

6. În graficul de mai jos, diferența dintre temperatura cea mai mare și cea mai mică este egală cu ...°C. (5 p)



SUBIECTUL al II-lea. (30 de puncte)
Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată de vârf S și bază ABC. (5 p)

2. Media aritmetică a două numere naturale este 17,5 și unul dintre numere este 7. Determinați și al doilea număr. (5 p)

3. Prețul unui telefon mobil a scăzut cu 10% și, după o săptămână, noul preț a scăzut cu încă 10%. După cele două modificări de preț, telefonul costă 81 de lei.

a) Arătați că prețul inițial al telefonului a fost de 100 de lei. (5 p)

b) Cu ce procent din prețul inițial s-a micșorat prețul produsului după cele două ieftiniri? (5 p)

4. Determinați valoarea numărului real a știind că punctul $A(2; a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2-a)\cdot x + 2$. (5 p)

5. Simplificați raportul $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-10x+25}$ cu $x-5$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

SUBIECTUL al III-lea. (30 de puncte)
Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Figura 1 reprezintă schița unui cort în formă de prismă dreaptă care are ca bază triunghiurile echilaterale ABC și DEF. Se știe că $BC = 2$ m și $CF = 3$ m.

a) Calculați distanța de la punctul A la planul (BCE); (5 p)

b) Calculați volumul cortului. (5 p)

c) Verificați dacă, pentru confecționarea cortului, sunt suficienți 22 m^2 de pânză specială (toate fețele cortului sunt din pânză, inclusiv podeaua). (5 p)

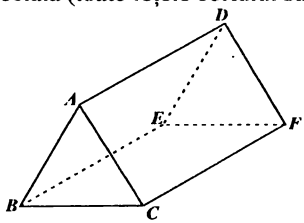


Fig. 1

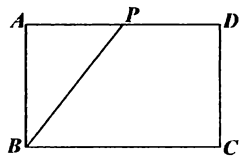


Fig. 2

2. Figura 2 reprezintă schița unui teren a cărui arie este de 8 hectare.

a) Exprimați aria terenului în m^2. (5 p)

Pe acest teren se sapă un șanț $[BP]$ pentru canalizare ($P \in AD$). Unghiurile ABP și PBC sunt congruente. Valoarea raportului dintre aria triunghiului ABP și aria dreptunghiului $ABCD$ este 0,25. (5 p)

b) Arătați că $BC = 2AB$. (5 p)

c) Calculați lungimea, exprimată în metri, a șanțului $[BP]$ și aproximați rezultatul cu cel mai apropiat număr natural. (5 p)

Test 120

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $25 + 15 : 3$ este egal cu ... . (5p)

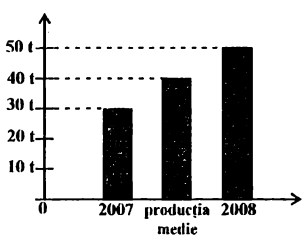
2. 25% din 360 kg reprezintă ... kg. (5p)

3. Fracția ireductibilă echivalentă cu fracția $\frac{27}{81}$ este ... . (5p)

4. Cel mai mare dintre numerele $a = 2\sqrt{3}$ și $b = 3\sqrt{2}$ este ... . (5p)

5. Aria unui pătrat este egală cu 81 cm^2. Perimetrul pătratului este egal cu ... m. (5p)

6. Graficul alăturat reprezintă producția de legume a unei ferme legumicole în anii 2007 și 2008. Conform graficului, producția medie de grâu este egală cu ... tone. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, un romb $ABCD$. (5p)

2. Un biciclist a parcurs o distanță în trei etape. În prima etapă a parcurs $\frac{1}{3}$ din tot drumul, în a doua 20% din restul drumului și în a treia etapă

ultimii 40 km. Câți kilometri a avut de parcurs biciclistul și câți a parcurs în a doua zi? (5p)

3. În două depozite se află 1200 t, respectiv, 1600 t de grâu.

a) Dacă din primul depozit se scot 100 t de grâu zilnic iar din al doilea 200 t de grâu zilnic, aflați după câte zile în cele două depozite rămân cantități egale de grâu. (5p)

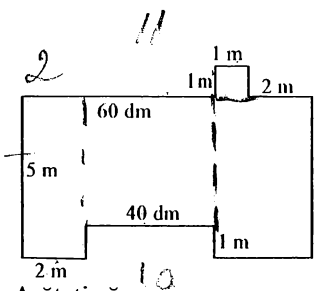
b) Dacă din primul depozit s-ar scoate 300 t de grâu zilnic iar din al doilea 400 t de grâu zilnic, după câte zile cele două depozite ar rămâne goale? (5p)

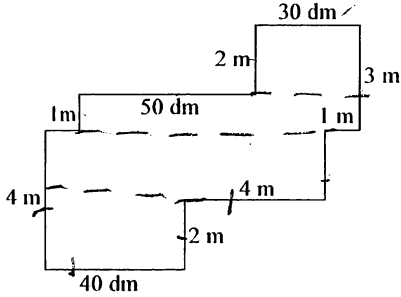
4. Dacă $E(x)=(x-2008)^{2009}+(2008-x)^{2009}$, calculați $E(2009)$. (5p)

5. Determinați numărul rațional x știind că numărul $(x^2-9)\sqrt{2}$ este rațional. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Figurile de mai jos reprezintă schema a două loturi de teren din curtea unei ferme ce urmează a fi pavate cu piatră cubică și împrejmuite cu gard.





Arătați că:

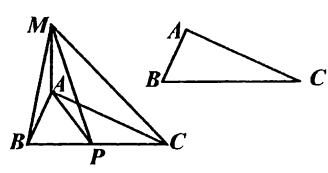
a) Cele două terenuri au același perimetru. (5p)

b) Aria unui lot este cu $4m^2$ mai mare decât aria celuilalt lot de teren. (5p)

c) Aflați lungimea gardului ce împrejmuiește ambele terenuri. (5p)

d) Dacă se utilizează pentru pavare pavele cubice cu latura de 25 cm, iar un metru pătrat de pavele costă 25 de lei, aflați câte pavele cubice s-au folosit și cât a costat pavarea ambelor terenuri știind că pentru fiecare teren s-a cumpărat câte 3 metri pătrați de pavele cubice în plus față de suprafața lor. (5p)

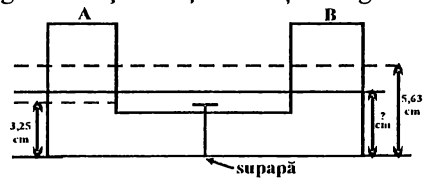
2. Figura alăturată, reprezintă schema unei parcări. ABC este un triunghi dreptunghic cu catetele $AB = 20$ m și $AC = 21$ m. Pentru iluminarea parcării în vârful A se fixează un stâlp vertical $AM = 10$ m, ancorat în punctul M de punctele B, C și P, unde punctul P se află pe ipotenuza BC a triunghiului.



a) Aflați lungimile cablurilor necesare pentru ancorarea stâlpului de punctele B și C. (5p)
b) Aflați lungimea cablului necesar pentru ancorarea stâlpului de punctul P știind că lungimea acestuia este minimă. Aproximați cu eroare de $\frac{1}{10}$ prin adaos. (5p)
Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 121

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.
1. Rezultatul calculului $\sqrt{12,25} : 7$ este egal cu ... . (5p)
2. Divizorii naturali proprii ai numărului 20 sunt ... . (5p)
3. Descompunerea în factori primi ai numărului 20 este ... . (5p)
4. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 8; 15 și 20 este ... . (5p)
5. Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 45 m. Latura triunghiului are lungimea egală cu ... m. (5p)
6. În diagrama de mai jos apa din vasul A are înălțimea de 3,25 cm iar în vasul B are înălțimea de 5,63 cm. Dacă se deschide supapa dintre ele, apa din cele două vase va ajunge la același nivel și are înălțimea egală cu ... cm. (5p)



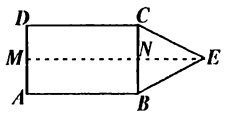
Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.
1. Desenați pe foaie de examen, un trapez $ABCD$ cu bazele AB și CD. (5p)
2. Diferența a două numere este 120. Aflați numerele știind că unul este de trei ori mai mare ca celălalt. (5p)
3. Terenul unei asociații agricole a fost cultivat astfel: $\frac{1}{4}$ din teren plus 30 ha cu porumb, $\frac{5}{8}$ din rest cu grâu, iar diferența, care reprezintă $\frac{1}{4}$ din tot terenul, a fost cultivată cu orz.
a) Aflați ce suprafață de teren are asociația. (5p)
b) Aflați ce suprafață de teren s-a cultivat cu fiecare cultură? (5p)

4. Fie expresia: $E(x) = (x+1)^2 + 2 \cdot (x-7) + 1$. arătați că $E(x) = (x+6)(x-2)$, pentru orice x număr real. (5p)

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x^2 - 4| + (x-2)^2 = 0$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată sunt reprezentate schematic două terenuri ale unei ferme agricole ce urmează a fi însămânțate cu grâu. $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 300$ m, iar BCE este un triunghi echilateral.



Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor (AD) și, respectiv, (BC). Se notează cu x lungimea segmentului NE exprimată în metri.

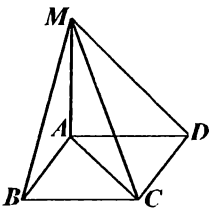
a) Exprimați în funcție de x aria terenului BCE. (5p)

b) Arătați că aria terenului $ABCD$ este egală cu $200\sqrt{3}\,x$ m^2. (5p)

c) Pentru ce valori ale lui x aria terenului $ABCD$ este dublul ariei terenului BCE. (5p)

d) Ambele terenuri sunt însămânțate cu grâu, pentru care s-a cumpărat sămânță la prețul de 3,5 lei/kg. Știind că la un hectar s-au folosit 120 kg de grâu, aflați cu eroare de $\frac{1}{100}$ prin lipsă cât a costat în total sămânța pentru ambele terenuri dacă $x = 300$ m.($\sqrt{3} = 1{,}732$) (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic un teren de sport. $ABCD$ este un dreptunghi cu $BC = 120$ m și $AB = 50$ m. Se realizează o instalație de nocturnă prin montarea unui stâlp vertical AM înalt de 30 m, ancorat în punctul M de vârfurile B, C, D ale terenului.



a) Aflați lungimea cablurilor necesare pentru ancorarea stâlpului de punctele B, D și C. (5p)

b) Arătați că lungimea cablului utilizat pentru a realiza toate cele trei ancorări este mai mare de 300 m. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 122

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

I. 1. Dacă $2 \cdot x = 26$, atunci numărul real x este egal cu ... . (5p)

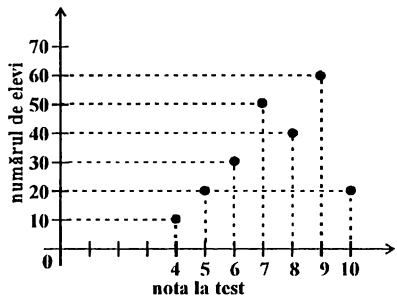
2. Dacă $2x < 26$, atunci numărul real x se află în intervalul (...). (5p)

3. Cel mai mare număr natural de două cifre pătrat perfect este ... . (5p)

4. Un cerc are raza egală cu $3\sqrt{3}$ cm. Lungimea cercului este egală cu ... cm.(5p)

5. Aria totală a unui tetraedru regulat este egală cu $16\sqrt{3}$ cm^2. Muchia tetraedrului are lungimea egală cu ... cm. (5p)

6. Toți elevii unei școli au susținut testul inițial la matematică. Rezultatele obținute sunt reprezentate în graficul alăturat. Conform graficului la testul inițial au participat un număr de ... elevi. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, un triunghi isoscel ABC cu baza BC. (5p)

2. Din 200 tone de grâu se obțin 160 tone de făină. Din câte tone de grâu se obțin 420 tone de făină? (5p)

3. Dacă, în cabinetul de informatică, elevii clasei a VIII – a A se așează câte doi la un calculator, rămân 5 elevi nerepartizați, iar dacă se așează câte trei, două calculatoare mai puțin performante rămân neutilizate, iar la un calculator stau doi elevi.

a) Câte calculatoare sunt în cabinetul de informatică? (5p)

b) Câți elevi sunt în clasa a VIII- a A? (5p)

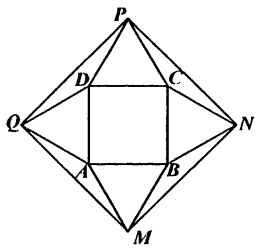
4. Comparați numerele:

$a = \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{200}$ și $b = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{27}$. (5p)

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$. Verificați dacă punctele $A(0; -3)$ și $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ aparțin graficului funcției. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată este reprezentat schematic un model decorativ de pe pardoseala unei săli de spectacol. $ABCD$ este un pătrat cu latura de 8 dm, iar triunghiurile MAB, NBC, PCD și ADQ sunt echilaterale. Pătratul este colorat în roșu, triunghiurile echilaterale în albastru, iar triunghiurile MBN, NCP, PDQ și MAQ în galben. **a)** Aflați măsura unghiului $\sphericalangle MBN$.(5p)



b) Aflați aria suprafeței colorate în albastru.(5p)

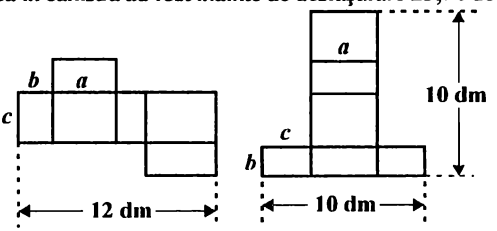
c) Arătați că aria totală a modelului decorativ este egală cu $64 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)$ dm^2. (5p)

d) Cât la sută din suprafața colorată cu galben reprezintă suprafața colorată cu roșu? (5p)

2. Figurile de mai jos reprezintă două desfășurări diferite ale unei canistre metalice în formă de paralelipiped dreptunghic.

a) Aflați aria totală a canistrei. (5p)

b) Verificați dacă în canistră au fost înainte de desfășurare 23,9 *l* de benzină. (5p)



Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 123

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}:\frac{2}{3}\right)\cdot 2$ este egal cu ... . (5p)

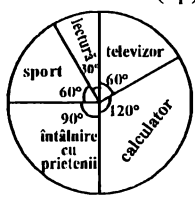
2. Descompunând în factori x^2-4 obținem ... . (5p)

3. Simplificând raportul $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ se obține ... . (5p)

4. Diametrul unui disc este de 8 m. Aria discului este egală cu ... m^2. (5p)

5. Aria totală a unui cub este egală cu 96 m^2. Diagonala cubului este egală cu ... m. (5p)

6. Diagrama circulară din figura alăturată reprezintă rezultatele unui sondaj de opinie legat de felul în care preferă să-și petreacă timpul liber 36 de elevi ai unei clase. Conform graficului, lectura este preferată de un număr de ... elevi. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

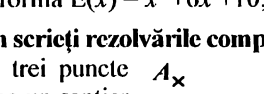
1. Desenați, pe foaia de examen, un dreptunghi $ABCD$ și diagonalele sale AC și BD. (5p)

2. La un examen oral au fost propuse 42 de subiecte. Un elev știe 28 dintre ele. Care este probabilitatea ca pe bilet să fie un subiect pe care nu-l știe? (5p)

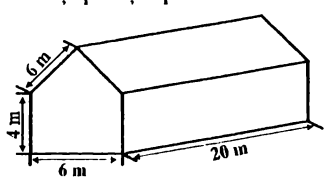
3. O gospodină vrea să ambaleze un număr de ouă. Dacă le-ar ambala câte 2 sau câte 3 sau câte 4 sau câte 5 sau câte 6, îi va rămâne de fiecare dată câte un ou neambalat. Ambalându-le câte 7 nu i-a rămas niciun ou.

a) Verificați, dacă gospodina putea avea în coș 721 de ouă. (5p)
b) Aflați cel mai mic număr de ouă care poate fi în coșul gospodinei. (5p)
4. Dacă $|a^2-9|+a^2-2ab+b^2=0$, unde a și b sunt numere reale, verificați dacă perechea (a, b) aparține mulțimii $\{(3;3);(-3;-3)\}$. (5p)
5. Dacă $x \in \mathbb{R}$, arătați că expresia $E(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2+$
$+(x-2)(x+2)-3x^2+14$ poate fi scrisă sub forma $E(x)=x^2+6x+10$;(5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.
1. În figura alăturată sunt reprezentate prin trei puncte necoliniare A, B, C trei mașini care lucrează pe un șantier și noaptea. Trebuie instalat un bec într-un punct O astfel încât toate mașinile să fie la fel de iluminate.



a) Descrieți o construcție a punctului O în care trebuie instalat becul. (5p)
b) Dacă triunghiul ABC este echilateral cu $AB = 15$ cm, determinați lungimea segmentului OA. (5p)
c) Dacă triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza $BC = 12$ m, aflați lungimea segmentului OA. (5p)
d) Dacă $AB = AC = 10$ m și $BC = 12$ cm, precizați poziția punctului O în planul triunghiului ABC. (5p)
2. În figura alăturată este reprezentată schematic un grajd în formă de paralelipiped dreptunghic.
Acoperișul grajdului este din tablă și are formă de prismă triunghiulară regulată.



a) Știind că un metru pătrat de tablă costă 35 lei, aflați costul total al tablei folosite pentru acoperiș dacă la îmbinări s-a utilizat 8% din suprafața acoperișului. (5p)
b) Știind că o vacă are nevoie de 12 m^3 de aer, aflați câte vaci pot fi adăpostite în grajd. (5p)
Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 124

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.
1. Partea întreagă a numărului $-3,47$ este egală cu ... . (5p)
2. Cel mai mare număr întreg din intervalul $[-9;-3)$ este egal cu ... . (5p)
3. Dacă $a = 0+3+5+7+9$ și $b = 0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5$, atunci media aritmetică a numerelor a și b este egală cu ... . (5p)
4. Pe cercul de centru O se consideră punctele A și B astfel încât $OA=OB=6$ cm și $m(\widehat{AB}) = 60°$. Aria triunghiului AOB este egală cu ... cm^2. (5p)

5. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ măsura unghiului format de dreptele BD și $A'C'$ este egală cu ...°. (5p)

6. Acum 2 ore și 15 minute ceasul din figura alăturată a indicat ora ... și .... de minute. (5p)

Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați pe foaia de examen, un triunghi obtuzunghic ABC. (5p)

2. Un obiect costă 135,50 lei. S-a redus prețul cu 97,20 lei. Cât costă acum obiectul? (5p)

3. Doi elevi au rezolvat într-o săptămână 42 de probleme de matematică.

a) Aflați câte probleme a rezolvat fiecare, știind că al doilea a lucrat cu 10% mai multe din câte a rezolvat primul. (5p)

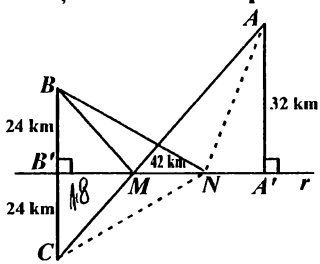
b) Cât la sută reprezintă numărul problemelor rezolvate de al doilea elev din numărul problemelor rezolvate de primul elev. (5p)

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$. Verificați dacă graficul funcției intersectează axele unui sistem ortogonal de coordonate în punctele $A(0; -4)$ și $B(2; 0)$. (5p)

5. Arătați că numărul $10^n - 10$ este divizibil cu 9, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Figura alăturată reprezintă schematic două localități A și B situate de aceeași parte a unui râu rectiliniu r. Cele două localități sunt programate pentru a fi alimentate cu apă de la o stație ce urmează a fi construită pe malul râului. Se știe că punctele B și C sunt simetrice față de dreapta r; $BC \cap r = \{B'\}$; $AA' \perp r$, $A' \in r$; $BB' = 24$ km; $AA' = 32$ km; $A'B' = 42$ km; $AC \cap r = \{M\}$ și $m(\sphericalangle AMA') = u°$.



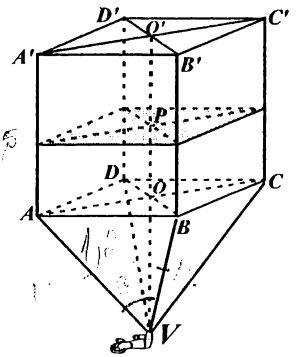
a) Exprimați în funcție de u, măsura unghiului BMB'. (5p)

b) Dacă $N \in (A'B')$, arătați că $MA + MB \leq NA + NB$. (5p)

c) Să se precizeze locul de plasament al stației astfel încât costul proiectului de alimentare cu apă a celor două localități să fie minim. (5p)

d) Dacă pentru montarea unui metru de conductă în proiectul de execuție este prevăzută suma de 1500 lei, atunci suma de 105000000 lei este suficientă pentru finalizarea lucrării de alimentare cu apă a celor două localități? (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic un bazin cu apă montat în grădină și confecționat din tablă. $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu muchia bazei $AB = 1{,}2$ m și înălțimea $AA' = 1{,}5$ m, iar $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu $m(\sphericalangle AVB) = 60°$.



a) Aflați suprafața tablei folosite pentru confecționarea bazinului, știind că nu sunt pierderi la îmbinări, iar bazinul are și capacul $A'B'C'D'$ confecționat tot din tablă. ($\sqrt{3} = 1{,}732$). (5p)

b) Dacă în bazin sunt $1488\sqrt{2}$ ℓ de apă, aflați înălțimea VP a apei din acesta ($P \in VO'$). (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 125

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $10 \cdot \left(\frac{1}{20} + 0{,}75\right)$ este egal cu .... . (5p)

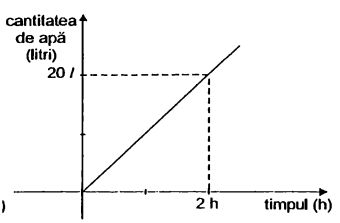
2. Fie proporția $\frac{x}{3} = \frac{12}{y}$, unde x și y sunt numere naturale nenule. Produsul $x \cdot y$ este egal cu ... . (5p)

3. Numărul natural a pentru care $a^2 = 25$ este egal cu ... . (5p)

4. Dacă dreptunghiul $ABCD$ are AC=15cm și BC=9cm, atunci AB= ...cm. (5p)

5. Aria totală a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm, BC=6 cm și $AA' = 6\sqrt{2}$ este egală cu ...cm^2. (5p)

6. Dependența dintre timpul și cantitatea de apă care curge printr-un robinet într-un bazin este reprezentată în graficul alăturat. Conform graficului, cantitatea de apă care curge în bazin în 3 ore este egală cu ...ℓ. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, un trapez dreptunghic $ABCD$ cu bazele $[AB]$ și $[CD]$ și linia sa mijlocie, $[MN]$. (5p)

2. 6 robinete pot umple un bazin în 8 ore. În cât timp vor putea umple același bazin 10 robinete care au același debit? (5p)

3. La un concurs de matematică au fost 40 de întrebări. Pentru un răspuns corect s-au acordat 2 puncte şi pentru un răspuns greşit s-au scăzut 0,5 puncte. Un elev a obţinut 60 de puncte şi a răspuns la toate întrebările.

a) La câte întrebări a răspuns corect? (5p)

b) La câte întrebări a răspuns greşit? (5p)

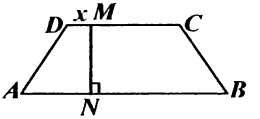
4. După majorarea preţului cu 20% un obiect costă 90000lei. Care a fost preţul obiectului înainte de majorare? (5p)

5. Se dă expresia: $E(x)=\left(\frac{2}{x^2-4}+\frac{x}{x^2-4x+4}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot\frac{x^4-8x^2+16}{x^2-1}$.

Arătaţi că $E(x)=\frac{8\cdot(x+2)}{x+1}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.

1. În figura alăturată este reprezentată schematic o placă de marmură *ABCD* care a fost tăiată în două părţi pentru a realiza un pavaj. Se ştie că: $AB \parallel CD$, $AD \not\parallel BC$, $AB = 80$ cm, $CD = 64$ cm.



$AD = BC = 10$ cm şi $MN \perp AB$, unde $M \in (CD)$ şi $N \in (AB)$. $DM = x$ (x este distanţa exprimată în cm, $0 < x < 64$).

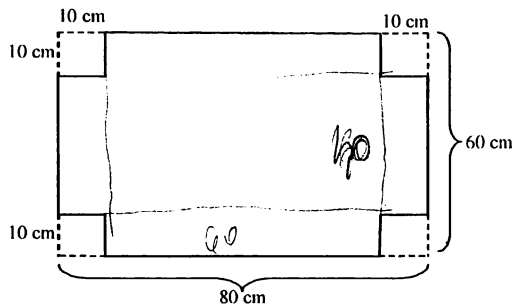
a) Aflaţi, în funcţie de x, aria plăcii de marmură *ANMD*. (5p)

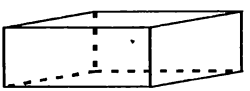
b) Arătaţi că aria plăcii de marmură *MCBN* este egală cu $6\cdot(68-x)$ cm^2. (5p)

c) Pentru ce valoare a lui x aria plăcii *ANMD* este o treime din aria plăcii *MCBN*? (5p)

d) Dacă $DM = 14$ cm şi un metru pătrat de marmură costă 300 lei, aflaţi cât a costat în total bucata *MNBC* de marmură. (5p)

2. Figura de mai jos reprezintă o foaie de tablă dreptunghiulară cu dimensiunile de 80 cm şi 60 cm. Din fiecare colţ al dreptunghiului se taie câte un pătrat cu latura de 10 cm, apoi prin îndoire şi lipire se realizează o cutie fără capac în formă de paralelipiped dreptunghic.





a) Verificați dacă în cutie încap 25 litri de apă. (5p)

b) Verificați dacă în cutie încape o țeavă metalică ce nu poate fi îndoită cu lungimea de $30\sqrt{6}$ cm. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 126

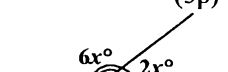
Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Numărul 0,875 scris sub formă de fracție ireductibilă este egal cu ... .(5p)

2. Rezultatul calculului $\left(\frac{7}{8}\right)^2$ este egal cu ... . (5p)

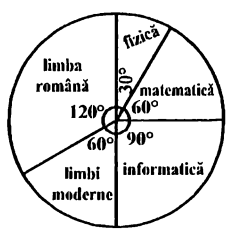
3. Un elev are pe un raft 15 caiete de matematică și 12 caiete de dictando. Se alege la întâmplare un caiet. Probabilitatea să fie ales un caiet de matematică este egală cu ... . (5p)

4. În figura alăturată punctele A, O, B sunt coliniare. Atunci $x = ...^\circ$ și $...'$. (5p)



5. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Măsura unghiului diedru dintre planele (ABB') și (ACC') este egală cu ... °. (5p)

6. Situația participării la centrul de excelență a 120 de elevi dintr-o școală este reprezentată în diagrama circulară alăturată. Conform diagramei, la informatică participă un număr de ... elevi. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, un triunghi ABC și o linie mijlocie a acestuia $[DE]$. (5p)

2. Într-un butoi sunt 213,5 ℓ de ulei. Știind că s-au vândut 98,5 ℓ de ulei cu prețul de 2,8 lei, iar restul cu prețul de 2,85 lei, cât s-a încasat pe toată cantitatea de ulei? (5p)

3. Suma a patru numere naturale este 76. Știind că primele trei sunt direct proporționale, respectiv cu numerele 2; 3; 4, iar media aritmetică a ultimelor două numere este 18, aflați:

a) Suma ultimelor două numere. (5p)

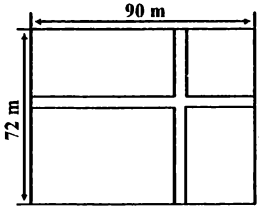
b) Cele patru numere. (5p)

4. Fie numărul real $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Arătați că $2a^2 - 2a = 1$. (5p)

5. Arătați că $(x-3)^3 - x + 3 = (x-4)(x-3)(x-2)$, pentru orice număr real x. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată este reprezentată schematic o grădină dreptunghiulară tăiată de două alei perpendiculare cu lățimea de 1 m.



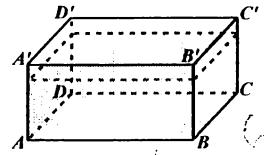
a) Dacă grădina este împrejmuită cu un gard, iar construcția acestuia a costat 9720lei, aflați cât a costat un metru liniar de gard. (5p)

b) Știind că aleile au fost pavate cu piatră cubică cu dimensiunea de 20 cm, aflați câte plăci s-au utilizat? (5p)

c) Aflați aria totală cultivabilă a grădinii în hectare. (5p)

d) Dacă grădina a fost cultivată cu căpșuni, iar producția a fost de 10 tone la hectar, aflați ce sumă s-a încasat prin vânzarea căpșunilor la prețul de 2 lei kilogramul. (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic un bazin de înot, care are formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de $AB = 18$ m și lățimea $BC = 6$ m. Din cauza evaporării nivelul apei a scăzut în timpul zilei cu 5 cm. Noaptea, pentru a reumple bazinul se utilizează o pompă care are debitul de 900 ℓ pe minut.



a) Câți hectolitri de apă s-au evaporat în timpul zilei? (5p)

b) Cât timp trebuie să funcționeze pompa pentru a reumple bazinul? (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 127

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $121 : 11 - 7$ este egal cu ... . (5p)

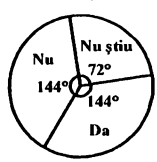
2. Dacă $3x + 1 = 4$, atunci numărul real x este egal cu ... . (5p)

3. Fie mulțimile $A = \{-3; -2; 1; 2; 3\}$ și $B = \{-1; 0; 2; 4\}$. Mulțimile $A \cap B = \{...\}$. (5p)

4. Un pătrat are lungimea laturii de 9 cm. Perimetrul pătratului este egal cu ... cm. (5p)

5. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 3$ cm; $AD = 4$ cm și $DD' = 12$ cm. Sinusul unghiului format de diagonala BD' cu planul $ABCD$ este egal cu ... . (5p)

6. Rezultatele unui sondaj de opinie sunt reprezentate în graficul circular alăturat. Știind că au fost intervievate 1500 de persoane, numărul persoanelor care au răspuns „Da“ este egal cu ... . (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, două drepte paralele a și b tăiate de o secantă c. (5p)

2. Un automobil a parcurs într-o zi 416,25 km, iar a doua zi cu 15,50 km mai puțin decât în ziua precedentă. Ce distanță a parcurs în cele două zile? (5p)

3. Mai mulți copii au o sumă de bani. În prima zi cheltuiesc 20% din sumă, a doua zi $\frac{1}{2}$ din rest și le mai rămân 560 lei.

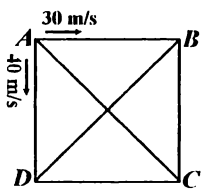
a) Câți lei au cheltuit a doua zi? (5p) **b)** Câți lei au avut inițial? (5p)

4. Se dau numerele $x = 2 - \sqrt{3}$ și $y = 2 + \sqrt{3}$. Media geometrică a numerelor x și y este egală cu ... . (5p)

5. Rezolvați, în mulțimea numerelor naturale inecuația $3 \cdot (x+2) - 5 \leqslant x + 4$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată sunt reprezentate schematic patru orașe. Kilometrul 0 al fiecărui oraș este situat în punctele A, B, C, D. Se știe că $ABCD$ este pătrat cu perimetrul de 1008 km, iar orașele sunt legate între ele două câte două prin autostrăzi drepte (rectilinii). Din punctul A pleacă simultan două automobile, deplasându-se uniform pe laturile pătratului în sensurile indicate de săgeți cu vitezele de 40 m/s și 30 m/s.



a) Arătați că distanța dintre orașele A și C este mai mică de 360 km. (5p)

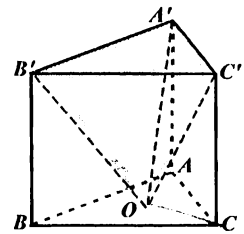
Care este distanța dintre cele două automobile după:

b) două ore de mers; (5p)

c) 3 ore și 30 de minute de mers. (5p)

d) După cât timp cele două automobile se vor întâlni? (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic un bidon din tablă plin cu apă care are formă de prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. În bidon se introduce o pâlnie piramidală $OA'B'C'$ din tablă, unde punctul O este centrul bazei ABC a prismei și $AB = 60\sqrt{3}$ cm, iar $AA' = 40\sqrt{3}$ cm.



a) Calculați suprafața tablei din care este confecționată pâlnia. (5p)

b) Câți litri de apă se varsă din bidon după introducerea pâlniei în el? (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 128

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului 3,24 : 0,18 este egal cu ... . (5p)

2. Fie expresia $E(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$. $E(1) = ...$. (5p)

3. 2,1 ha = ... m^2. (5p)

4. Un trapez are lungimile bazelor egale cu 40 m și 60 m. Linia mijlocie a trapezului are lungimea egală cu ... m. (5p)

5. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara AM. Știind că $AB = 4$ cm și $AM = 3$ cm, distanța de la punctul M la latura BC a pătratului este egală cu ... cm. (5p)

6. Temperaturile înregistrate la o stație meteorologică în 10 zile din luna iulie sunt date în tabelul de mai jos.

Conform tabelului media temperaturilor înregistrate este egală cu ... °. (5p)

Data	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Temperatura	27°C	25°C	31°C	36°C	34°C	42°C	41°C	40°C	32°C	24°C

Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, unghiul ABX exterior triunghiului ABC. (5p)

2. Dacă la triplul unui număr natural adunăm 40, obținem 100. Aflați numărul. (5p)

3. Suma a patru numere este 690. Știind că al doilea număr este 80% din primul, al treilea este 75% din al doilea, iar al patrulea este 60% din al treilea, aflați:

a) cele patru numere. (5p)

b) cât la sută din primul număr reprezintă al treilea număr? (5p)

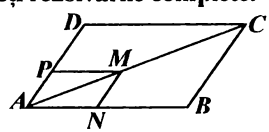
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. Reprezentați grafic funcției f într-un sistem ortogonal de coordonate. (5p)

5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația

$$(x+2)(x-1) - 3(4-x) < (x-3)^2 + 1. \quad (5p)$$

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

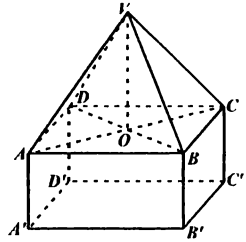
1. În figura alăturată este ilustrată schematic curtea unei case. $ABCD$ este paralelogram. Pe aleea care unește punctele A și C se construiește în punctul M un foișor și apoi două alei MN și MP paralele la gardurile BC și, respectiv, CD ale curții care conțin porțile situate în punctele N și P; $N \in AB$ și $P \in AD$. Știind că $AB = 20$ m; $AD = 16$ m și $\frac{MA}{AC} = x$, unde x este un număr real, $0 < x < 1$, aflați în funcție de x: **a)** lungimea aleii MN.(5p) **b)** lungimea aleii MP. (5p)



c) Arătați că perimetrul patrulaterului $MNAP$ este egal cu $72x$. (5p)

d) Pentru ce valoare a lui x aria paralelogramului $ANMP$ este o treime din aria curții. (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic o piscină sub formă de prismă patrulateră regulată cu $AB = 12$ m și $AA' \leqslant 3$ m. Piscina este acoperită cu o umbrelă piramidală $VABCD$, unde $VA = VB = VC = VD = 10$ m.



a) Aflați suprafața pânzei din care este confecționată umbrela. (5p)

b) Dacă înălțimea apei din piscină este egală cu 2,5 m, verificați, dacă cantitatea de apă din piscină este egală cu 360000 l. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 129

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Mulțimea divizorilor întregi ai numărului 15 este $\{...\}$. (5p)

2. Aproximarea cu o zecime prin lipsă a numărului $\sqrt{5}$ este ... . (5p)

3. Numerele naturale de forma $\overline{ab}$ pentru care fracția $\frac{4}{a+b}$ este echiunitară sunt ... . (5p)

4. Într-un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ cu raza $R = 5$ cm se consideră coarda $AB = 8$ cm. Distanța de la centrul cercului la coarda AB are lungimea egală cu ... cm. (5p)

5. Lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 6 m, 8 m și 10 m este egală cu ... m. (5p)

6. S-a măsurat înălțimea elevilor din clasă și s-a realizat următorul tabel:

Înălțimea în cm	160	158	161	162	155	159
Numărul de elevi	4	3	5	2	10	1

Înălțimea medie a elevilor clasei este egală cu ... cm. (5p)

Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, un trapez dreptunghic $MQPN$ cu bazele MQ și NP. (5p)

2. Ionel are de 5 ori mai mulți bani decât Mihai. Împreună au 420 lei. Aflați ce sumă are fiecare copil. (5p)

3. Doi călăreți iau startul simultan din același loc pe o pistă circulară. Primul călăreț face o rotație completă în 30 de secunde și al doilea în 45 de secunde.

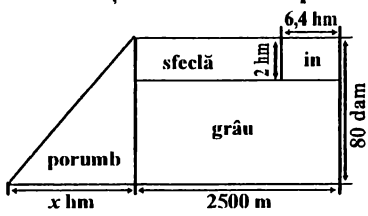
a) După cât timp se întâlnesc călăreții în locul de unde s-a dat startul?(5p)
b) Câte tururi a efectuat fiecare călăreț în acest interval de timp? (5p)

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 3$. determinați aria triunghiului format de graficul funcției cu axele unui sistem ortogonal de coordonate. (5p)

5. Se dă expresia: $E(x) = \left(\frac{1}{x-2} + \frac{6}{4-x^2} - \frac{2}{x+2}\right) : \left(\frac{x^2+4}{x^2-4} + 1\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$. Arătați că $E(x) = -\frac{1}{2x}$. (5p)

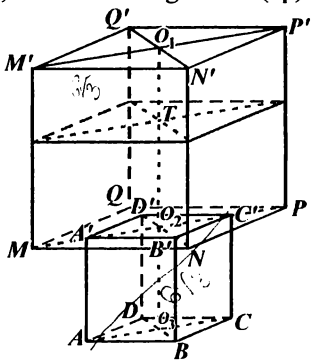
Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Pe un lot de teren al unei ferme agricole culturile sunt repartizate ca în figura alăturată.



a) Aflați în funcție de x aria întregului lot. (5p)
b) Lotul este împrejmuit cu un gard. Arătați că lungimea gardului este egală cu $(58 + x + \sqrt{x^2 + 64})$ hm. (5p)
c) Aflați x astfel încât aria suprafeței cultivate cu porumb să fie egală cu 30 ha. (5p)
d) Aflați aria suprafeței cultivate cu grâu, sfeclă și in. Dacă producția de grâu a fost de 4500 kg la hectar, cât a încasat fermierul de pe întreaga producție de grâu dacă prețul acestuia a fost de 1,20 lei la un kilogram? (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic un bazin de acumulare a apei confecționat din tablă. Bazinul este alcătuit din două cuburi suprapuse $MNPQM'N'P'Q'$ și $ABCDA'B'C'D'$ cu centrele fețelor $ABCD$, $A'B'C'D'$, $MNPQ$ și $M'N'P'Q'$ coliniare. Se știe că $MN = AC' = 6\sqrt{3}$ dm.



a) Cât a costat tabla necesară confecționării bazinului dacă un metru pătrat de tablă costă 25 lei și s-au cumpărat pentru îmbinări 2 m^2 de tablă în plus? (5p)
b) Dacă cantitatea de apă din bazin este egală cu 756 l, aflați distanța de la baza (capac) superioară $M'N'P'Q'$ a bazinului la suprafața apei. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 130

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $2{,}75 \cdot 100 - 125$ este egal cu ... . (5p)

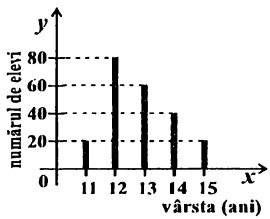
2. Restul împărțirii la 47 a numărului 1027 este egal cu ... . (5p)

3. Pătratul numărului 105 este egal cu ... . (5p)

4. Perimetrul unui triunghi echilateral cu latura de 6 cm este egal cu ... cm. (5p)

5. Suma lungimilor muchiilor unui tetraedru regulat este egală cu 24 dm. Aria unei fețe a tetraedrului regulat este de ... dm^2. (5p)

6. Graficul alăturat reprezintă numărul de elevi pe grupe de vârstă dintr-o școală gimnazială în care învață 220 elevi. Câți elevi din acea școală au vârsta mai mare de 13 ani? (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, o prismă triunghiulară dreaptă cu bazele triunghiurile echilaterale ΔABC și $\Delta A'B'C'$. (5p)

2. 7 muncitori pot executa o lucrare în 6 zile. În câte zile vor executa lucrarea 14 muncitori? (5p)

3. Se știe că media aritmetică a două numere naturale este 102,5 și valoarea raportului lor este 0,64.

a) Determinați cele două numere. (5p)

b) Calculați media geometrică a celor două numere. (5p)

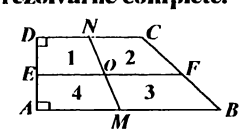
4. Se consideră sistemul de ecuații: $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$, de unde $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Verificați dacă perechea $(1; 2)$ este soluție a sistemului. (5p)

5. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Egalitatea $\frac{2}{3-x}+\frac{x-1}{x-3}=1$ este adevărată pentru orice număr real x, diferit de 3." (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Un teren $ABCD$ are formă de trapez dreptunghic și este parcelat ca în figura alăturată (M și N sunt mijloacele bazelor, iar E și F, mijloacele laturilor neparalele). Se știe că: $AB = 90$ m, $AD = 40$ m, $BC = 50$ m.

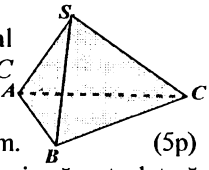


a) Aflați perimetrul terenului. (5p)

b) Pentru împrejmuirea terenului cu un gard se montează stâlpi de beton la distanța de 2 m unul de altul, lăsându-se un spațiu de 4 m pentru poarta de acces. Aflați câți stâlpi sunt necesari. (5p)

c) Aflați suma ariilor parcelelor 1 și 2 (în ari). (5p)
d) Dacă valoarea parcelei 1 este de 54000 lei, aflați valoarea parcelei 3 (prețul pe $1m^2$ fiind același). (5p)

2. În figura alăturată este reprezentată o piesă din metal având forma unei piramide triunghiulare regulate $SABC$ cu baza ABC și $SA \perp SB$, iar $AB = 12$ cm.



a) Arătați că înălțimea piramidei $SABC$ este egală cu $2\sqrt{6}$ cm. (5p)
b) Dacă piesa este introdusă într-un vas în formă de prismă patrulateră dreaptă cu baza pătrat de latură 12 cm și înălțimea de 24 cm, în care se află apă până la jumătate din înălțime, arătată că nivelul apei în vas va crește cu mai puțin de 1 cm. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 131

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $0,03 \cdot 0,12 - 0,003$ este egal cu ... . (5p)

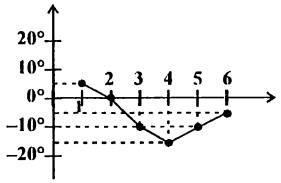
2. Dublul numărului $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$ este egal cu ... . (5p)

3. Rezultatul calculului $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{2}$ este egal cu ... . (5p)

4. Apotema pătratului cu diagonala de $4\sqrt{2}$ cm are lungimea egală cu ...cm.(5p)

5. Volumul unei prisme patrulatere drepte cu baza pătrat de latură 4 cm și diagonala de 9 cm este egal cu ... cm^3. (5p)

6. Graficul alăturat ilustrează variația temperaturii la nivelul solului în primele 6 zile ale unei luni de iarnă. Diferența dintre temperatura maximă și temperatura minimă este egală cu ...°. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$ și o diagonală a sa. (5p)

2. Știind că 3,5 kg de cafea costă 26,25 lei, aflați cât costă 7 kg de cafea. (5p)

3. La un concurs de matematică s-au acordat ca premii 125 de cărți și albume, numărul cărților fiind număr par mai mare decât numărul albumelor. Fiecare din cei 25 de elevi premiați a primit același număr de cărți și același număr de albume.

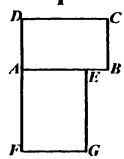
a) Câte cărți și câte albume a primit fiecare elev? (5p)
b) Câte cărți și câte albume au fost acordate ca premii? (5p)

4. a) Fie mulțimile $A = \{2x - 5, x - 2\}$ și $B = \{2x + 1, 3x - 2\}$, $x \in \mathbb{Z}$. Aflați numărul x știind că $A = B$. (5p)

5. Aduceți la forma cea mai simplă expresia: $E(x)=\left(\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{x}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată sunt reprezentate două terenuri dreptunghiulare $ABCD$ și $AEGF$. Se știe că $DC = 120$ m, $DF = 140$ m, $GF = 90$ m, $BC = x$ m.



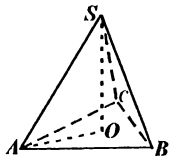
a) Exprimați în funcție de x perimetrul dreptunghiului $AEGF$. (5p)

b) Determinați valoarea lui x pentru care perimetrele celor două dreptunghiuri sunt egale. (5p)

c) Determinați ariile celor două terenuri exprimate în ari. (5p)

d) Proprietarul terenului $ABCD$ dorește să cumpere de la vecinul său (proprietarul terenului $AEGF$) o porțiune de teren așa încât cei doi să posede suprafețe egale. Câți ari ar trebui să cumpere? (5p)

2. În figura alăturată este reprezentată o piesă metalică având forma unei piramide regulate de vârf S și bază ABC cu înălțimea $SO = \sqrt{6}$ dm și muchia laterală $SA = 3\sqrt{2}$ dm.



a) Determinați aria laterală a piramidei. (5p)

b) Dacă piesa se transformă, prin topire într-o prismă dreaptă cu baza pătrat de latură 3 dm, aflați înălțimea prismei obținute. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 132

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Cel mai mare număr natural de trei cifre multiplu de 11 este numărul .... . (5p)

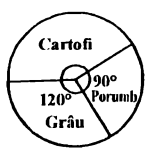
2. Divizorii întregi negativi ai numărului 73 sunt .... . (5p)

3. Dacă $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ astfel încât $a \cdot b = 73$, atunci $a + b$ este egal cu .... . (5p)

4. Lungimile diagonalelor unui romb sunt de 5 cm și 8 cm. Aria rombului este egală cu ... cm^2. (5p)

5. O piramidă cu 5 vârfuri are un număr de ... muchii. (5p)

6. Terenul de 60 ha al unui agricultor este repartizat pentru diferite culturi ca în diagrama de mai jos. Suprafața cultivată cu cartofi este de ... ha. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați o piramidă triunghiulară regulată $SABC$ (cu baza triunghiul ABC). (5p)

2. La o librărie s-au vândut 298 de culegeri de probleme. Ce sumă s-a încasat în total dacă 7 culegeri costă 105 lei? (5p)

3. Dintr-o clasă cu 25 de elevi, 60% s-au înscris la cercul de informatică și 52% la cercul de matematică. Aflați:

a) câți elevi s-au înscris la cercul de matematică; (5p)

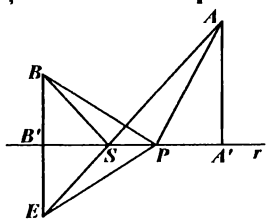
b) câți elevi sunt înscriși la ambele cercuri. (5p)

4. Aflați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z}^* / |x| < 5\}$. (5p)

5. Arătați că inversul numărului $-3^{-3} + 2^{-2} + (-4)^0$ este egal cu $\frac{108}{131}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată, A' și B' sunt proiecțiile punctelor A și, respectiv, B pe dreapta r, E este simetricul punctului B față de dreapta r și $S \in AE \cap r$ și $P \in r$.



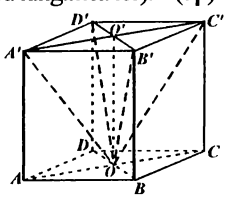
a) Comparați lungimea segmentului $[AE]$ cu suma lungimilor segmentelor $[AP]$ și $[PE]$. (5p)

b) Arătați că $[ES] \equiv [BS]$ și $[EP] \equiv [BP]$. (5p)

c) Demonstrați că: $BS + SA < BP + PA$. (5p)

d) Presupunem că A și B sunt două localități situate de aceeași parte a unui râu r, rectiliniu și $AA' = 16$ km, $BB' = 12$ km, $A'B' = 21$ km. Cele două localități urmează a fi alimentate cu apă de la o stație ce urmează a fi construită pe malul râului. Determinați locul unde urmează a fi amplasată stația (distanța față de B') astfel încât costul conductelor de alimentare cu apă să fie minim (costul conductelor este direct proporțional cu lungimea lor). (5p)

2. Figura alăturată reprezintă un cub din lemn $ABCDA'B'C'D'$ din care s-a scos prin scobire piramida $OA'B'C'D'$, unde O este centrul feței $ABCD$. Volumul corpului rămas este egal cu 144 cm^3.



a) Aflați lungimea muchiei cubului. (5p)

b) Corpul rămas urmează a fi vopsit. Aflați aria suprafeței vopsite. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 133

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului: $9-20:4+13^0+0{,}4$ este egal cu ... . (5p)

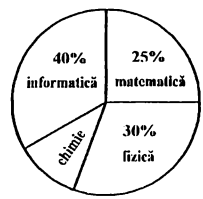
2. Media aritmetică a numerelor 6 și 8 este egală cu ... . (5p)

3. Probabilitatea ca aruncând un zar, să obținem un număr pătrat perfect, este ... .(5p)

4. Aria pătratului cu diagonala de 4 cm este egală cu ... cm^2. (5p)

5. Dacă lungimea diagonalei unui cub este $3\sqrt{3}$ dm, atunci volumul cubului este egal cu ... dm^3. (5p)

6. Situația participării la centrul de excelență a 200 de elevi dintr-o școală este reprezentată în diagrama de mai jos. La chimie participă un număr de .. elevi. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ și diagonala sa BD'. (5p)

2. Pentru 8 kg de roșii s-au plătit 42 lei. Câți lei se va plăti pentru 11 kg de roșii? (5p)

3. Un excursionist și-a propus să parcurgă un traseu în două zile.

În prima zi a parcurs $\frac{3}{5}$ din traseu, iar a doua zi restul de 12 km.

a) Care este lungimea traseului? (5p)

b) Câți kilometri a parcurs în prima zi? (5p)

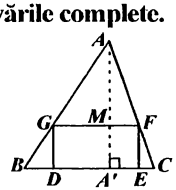
4. Fie mulțimea $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle/\,\frac{3x-5}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$. enumerați elementele mulțimii B. (5p)

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m-1)x+\sqrt{2}$, $m\in\mathbb{R}$;

a) Determinați m astfel încât punctul $A(-1,\ \sqrt{2}-1)$ să aparțină graficului funcției f. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată, triunghiul ABC este ascuțitunghic, $[AA']$ este înălțime, $DEFG$ este dreptunghi, $GF\cap AA'=\{M\}$, $AA'=BC=18$ cm.



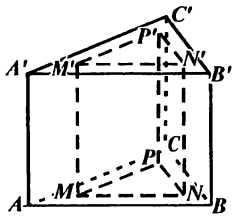
a) Arătați că $[AM]\equiv[GF]$. (5p)

b) Demonstrați că perimetrul dreptunghiului $DEFG$ este egal cu 36 cm. (5p)

c) Presupunem că suprafața triunghiulară ABC cu datele de mai sus este din tablă și că un tinichigiu trebuie să decupeze din ea un pătrat $DEFG$

cu $D, E \in BC, F \in AC$ și $G \in AB$. Determinați lungimea laturii pătratului și precizați pozițiile vârfurilor acestuia pe laturile triunghiului. (5p)

d) Determinați cât la sută din aria triunghiului ABC reprezintă aria pătratului decupat. (5p)



2. În figura alăturată, este reprezentată o piesă goală în interior, unde $ABCA'B'C'$ și $MNPM'N'P'$ sunt prisme drepte cu bazele triunghiuri echilaterale. Se știe că: $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AA' = 12$ cm, iar grosimea pereților piesei este de 1 cm. Aflați:

a) lungimea segmentului MN. (5p) **b)** volumul piesei. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 134

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $3 \cdot (-12) - (-3)^3$ este egal cu ... . (5p)

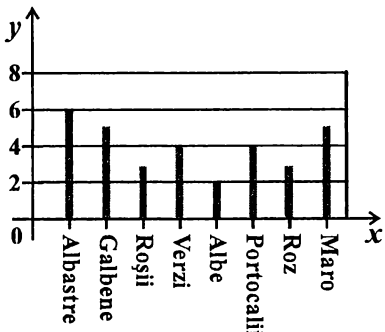
2. Media aritmetică a numerelor $4\sqrt{2}$ și $3\sqrt{8}$ este egală cu ... . (5p)

3. Dacă $5x = 4y$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$, atunci valoarea raportului $\frac{x}{y}$, scrisă sub formă de fracție zecimală, este egală cu ... . (5p)

4. Dacă M și N sunt mijloacele laturilor AC și, respectiv, BC ale unui triunghi echilateral ABC cu latura de 12 cm, atunci aria triunghiului AMN este egală cu ... cm^2. (5p)

5. Volumul unui cub a cărui diagonală are lungimea de $2\sqrt{3}$ dm este egal cu ... dm^3. (5p)

6. Bunica îi dăruiește Alexandrei o pungă cu bomboane. Numărul de bomboane de fiecare culoare din pungă este ilustrat în graficul alăturat. Alexandra ia din pungă o bomboană, la întâmplare. Care este probabilitatea ca aceasta să fie de culoare verde? (5p)



Subiectul al II-lea (30p) - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete

1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată $SABCD$ cu baza $ABCD$. (5p)

2. O carte costă 20 de lei. Cât va costa cartea după o scumpire cu 15%? (5p)

3. Pierre, student francez, şi-a propus să-şi petreacă o parte din vacanţă în România. La sosire, a schimbat în lei o sumă de 2000 euro, cursul de schimb fiind atunci: 1 euro = 4,10 lei.

La plecare, a constatat că i-a rămas o sumă de 1763 lei pe care a schimbat-o în euro, cursul de schimb fiind de această dată 1 euro = 4,30 lei.

a) Câţi lei a primit Pierre pentru cei 2000 euro? (5p)

b) Ce sumă în euro a pierdut Pierre datorită schimbării cursului valutar? (5p)

4. Arătaţi că numărul $\sqrt{2}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\right)$ este raţional. (5p)

5. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+n$; $m, n\in\mathbb{R}$, al cărei grafic intersectează axele unui sistem ortogonal de coordonate în punctele $A(0;2)$ şi, respectiv, $B(2;0)$. (5p)

Subiectul al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete

1. O clădire înaltă de 10,8 m, având ca bază un dreptunghi cu dimensiunile de 20 m şi 15 m trebuie înconjurată cu un gard metalic paralel cu pereţii clădirii şi situat la 20 m faţă de aceasta. (**fig. 1**)

Proprietarul clădirii a cerut firmei de construcţii ca înălţimea gardului să fie calculată în aşa fel încât un om înalt de 1,80 m aflat dincolo de gard la o distanţă de 5 m de el să nu poată vedea clădirea. (**fig. 2**)

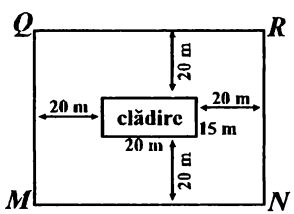


Fig. 1

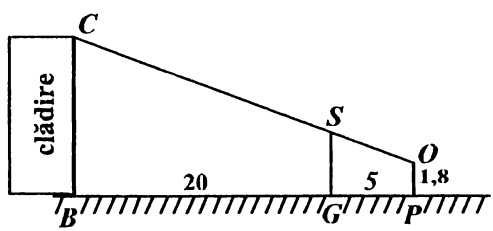


Fig. 2

a) Arătaţi că înălţimea minimă a gardului trebuie să fie de 3,6 m. (5p)

b) Aflaţi lungimea totală a gardului (se consideră că poarta de acces este încorporată în gard). (5p)

Gardul urmează a fi vopsit atât în exterior cât şi în interior pe toată suprafaţa.

c) Aflaţi câţi m^2 are suprafaţa ce urmează a fi vopsită. (5p)

d) Aflaţi ce cantitate de vopsea trebuie achiziţionată ştiind că se consumă 2 *l* de vopsea pentru 23 m^2 şi că în timpul operaţiunii de vopsire se pierde 4% din vopseaua utilizată. (5p)

2. În **figura 1** de mai jos este reprezentată desfășurarea unei cutii cubice $ABCDA'B'C'D'$ din tablă, fără capac, a cărei capacitate era de 27 l. Această cutie urmează a fi transformată într-un vas cu capac în formă de piramidă patrulateră regulată (piramida $SABCD$ din **figura 2**).

a) Aflați aria totală a piramidei $SABCD$. (5p)

b) Stabiliți dacă în vasul $SABCD$ încap 9 l de apă. (5p)

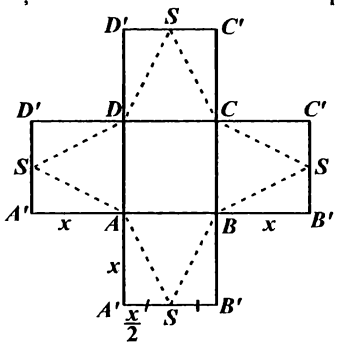


Fig. 1

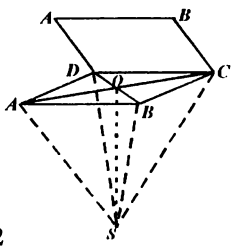


Fig. 2

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 135

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} : 2$ este numărul ... . (5p)

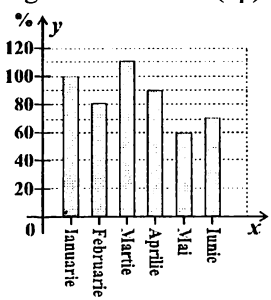
2. Dacă $|x + 2| = 10$, atunci numărul natural x este egal cu ... . (5p)

3. Dintr-o clasă cu 25 de elevi, $\frac{3}{5}$ sunt fete. Numărul băieților din acea clasă este ... . (5p)

4. Dacă (Ox și (Oy sunt bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare, atunci măsura unghiului $\sphericalangle xOy$ este egală cu ...°. (5p)

5. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are muchia laterală congruentă cu latura bazei. Dacă $AB = 6$ cm, atunci lungimea înălțimii VO a piramidei este egală cu ... cm. (5p)

6. Graficul alăturat ilustrează situația exporturilor unei firme producătoare de mobilă în primele 6 luni ale unui an, în procente. În luna mai, volumul exporturilor a scăzut față de luna martie cu ...%. (5p)



Subiectul al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete

1. Desenați, pe foaia de examen, o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu baza ABC. (5p)

2. O persoană a depus la o bancă suma de 2000 lei. Aflați ce sumă va avea în contul său după un an dacă dobânda anuală este de 6% pe an.(5p)

3. Pentru confecționarea unui raft sunt necesare următoarele materiale: 3 scânduri lungi, 4 scânduri scurte, 6 corniere și 9 șuruburi. Un tâmplar are în stoc 20 de scânduri lungi, 31 de scânduri scurte, 42 de corniere și 60 de șuruburi.

a) Se pot confecționa 5 rafturi cu materialele din stoc? (5p)

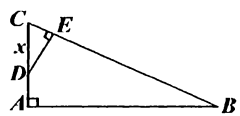
b) Care este numărul maxim de rafturi ce pot fi confecționate cu materialele din stoc? (5p)

4. Determinați valoarea raportului $\dfrac{\sin 60^\circ + \cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ}$. (5p)

5. Comparați, fără a calcula rădăcina pătrată, numerele $a = \sqrt{11} + \sqrt{13}$ și $b = \sqrt{5} + \sqrt{19}$. (5p)

Subiectul al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete

1. În figura alăturată este reprezentată o grădină care are forma unui triunghi dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$; $AB = 80$ m și $AC = 60$ m. Punctele D și E se află pe laturile AC și BC așa încât $m(\sphericalangle DEC) = 90^\circ$ și $CD = x$.



a) Aflați perimetrul și aria grădinii. (5p)

b) Exprimați în funcție de x lungimea segmentului $[BE]$. (5p)

c) Exprimați în funcție de x aria patrulaterului $ABED$. (5p)

d) Proprietarul grădinii a decis să doneze unei asociații umanitare porțiunea reprezentată de triunghiul ΔCDE. Determinați x știind că aria terenului care îi rămâne este de 3 ori mai mare decât aria terenului donat. (5p)

2. Din colțurile unei foi de carton ce are formă de pătrat cu latura de 44 cm, se decupează pătrate cu latura de 10 cm ca în **figura 1** alăturată. Îndoind marginile poligonului rămas se confecționează prin încleiere, o cutie fără capac (**figura 2**).

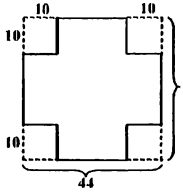


Fig. 1

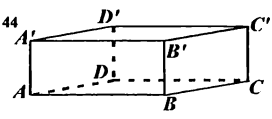


Fig. 2

a) Aflați volumul cutiei. (5p)

b) Ar putea fi ambalată în această cutie (dacă i s-ar pune și un capac) o vergea (rigidă) cu lungimea de 27 cm? (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 136

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Soluția număr real a ecuației $x-\sqrt{7}=0$ este egală cu... . (5p)

2. Dacă $2x-1 \leq 1$, atunci x aparține intervalului (...; ...]. (5p)

3. Simetricul punctului $C(-2; 0)$ față de originea axelor unui sistem de axe perpendiculare are coordonatele (...; ...). (5p)

4. Un pătrat are latura de 10 dm. Raza cercului înscris în acest pătrat este egală cu ... dm. (5p)

5. Aria laterală a unui tetraedru regulat este egală cu $27\sqrt{3}$ cm^3. Muchia tetraedrului este egală cu ... cm. (5p)

6. Într-o școală sunt 800 de elevi. Repartizarea elevilor după prima limbă străină pe care o studiază, este reprezentată prin diagrama circulară alăturată. Numărul elevilor care studiază prima limbă străină, limba franceză, este egal cu ... . (5p)

Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată cu vârful S și baza $PACE$. (5p)

2. Aflați cel mai mic număr natural de trei cifre distincte divizibil cu 15. (5p)

3. La examenul de admitere se dă un test grilă alcătuit din 40 de întrebări. Pentru un răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru un răspuns greșit se scad 2 puncte.

a) Ce punctaj a obținut un candidat care a răspuns corect la 14 întrebări? (5p)

b) Pentru a fi admis, punctajul obținut de un candidat trebuie să fie de peste 100 de puncte. La câte întrebări trebuie să răspundă corect? (5p)

4. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$, știind că punctele $A(-1; 1)$ și $B(1; 5)$ aparțin graficului funcției f. (5p)

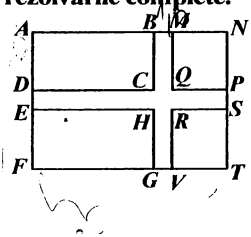
5. Dacă $x \in \mathbb{R}^*$ și $x + \frac{1}{x} = 6$, calculați $x^2 + \frac{1}{x^2}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

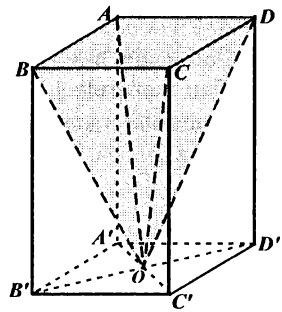
1. În figura alăturată este reprezentat schematic, un parc dreptunghiular tăiat de două alei. $AN = 58{,}5$ m, $AF = 40$ m, $AD = 22$ m, $BM = DE = 1{,}5$ m.

a) Calculați perimetrul parcului. (5p)

b) Calculați suprafața ocupată de cele două alei. (5p)



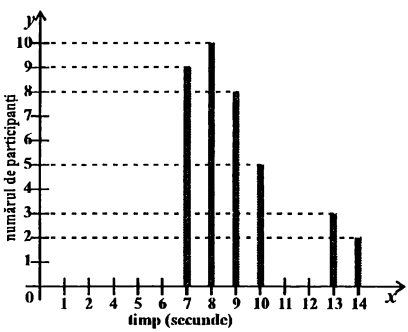
c) Calculați aria parcului *ANTF*. (5p)
d) Aleile se acoperă cu dale din piatră. Dacă 1 m^2 de pavaj costă 60 lei, aflați ce sumă e necesară pentru cumpărarea dalelor. (5p)
2. Figura alăturată reprezintă schematic o fântână săpată în piatră. $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă dreaptă cu baza pătratul $ABCD$. În fântână se introduce un bazin sub formă de piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$ și vârful, punctul O, centrul bazei $A'B'C'D'$. Se știe că $BB' = 12$ m și $AB = 1$m.



a) Calculați tangenta unghiului diedru format de planele (OAB) și $(A'B'C')$. (5p)
b) Câți hectolitri de apă încap în bazinul reprezentat de piramida $OABCD$? (5p)
Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 137

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.
1. Soluția număr real a ecuației $5x-25 = 0$ este egală cu ... . (5p)
2. Fie expresia $E(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.
Valoarea de adevăr a propoziției „$E(x)=-\frac{2}{x^2-1}$" este ... . (5p)
3. Dacă $x + 15 \leq 0$, atunci x aparține intervalului (...;...]. (5p)
4. Aria unui trapez cu lungimea liniei mijlocii de 18 cm și lungimea înălțimii de 12 cm este egală cu ... cm^2. (5p)
5. Lungimea înălțimii unei piramide patrulatere regulate cu latura bazei de 12 cm și volumul de 576 cm^2 este egală cu ... cm. (5p)
6. La un concurs de alergat pe distanța de 50 m sunt înregistrate următoarele rezultate reprezentate printr-o diagramă de bare. Numărul de participanți la concurs este egal cu ... . (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen un tetraedru regulat $ABCD$ și înălțimea VO a tetraedrului. (5p)

2. Aflați toate numerele naturale nenule, care împărțite pe rând la 5 dau câtul egal cu restul. (5p)

3. Suma a două numere naturale este 424.

a) Aflați media aritmetică a celor două numere. (5p)

b) Aflați numerele știind că împărțind numărul mai mare la cel mai mic se obține câtul 3 și restul 8. (5p)

2. Se dă expresia:

$$E(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3-x}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}\right):\frac{10-x}{(x+1)(x^2-x+1)}-3\right],$$

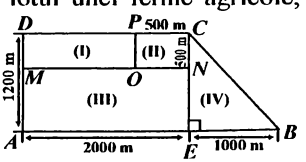
unde $x\in\{-3;-1;3;10\}$.

Arătați că forma cea mai simplă a expresiei este $\frac{5-x}{x-3}$. (5p)

5. Arătați că $\sqrt{1995\cdot n+2007}\notin\mathbb{Q}$, oricare ar fi numărul natural n. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată este ilustrat schematic lotul unei ferme agricole, împărțit în patru parcele, notate pe figură cu I, II, III, IV.



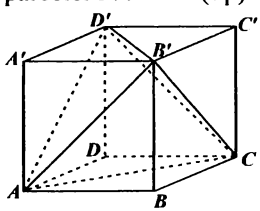
a) Aflați aria parcelei III, în hectare. (5p)

b) Aflați aria parcelei IV. (5p)

c) Câte hectare are întregul lot? (5p)

d) Cât la sută din aria întregului lot reprezintă aria parcelei IV. (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic un cub din lemn $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de $6\sqrt{2}$ cm.



a) Aflați volumul și aria totală a cubului. (5p)

b) Cubul se taie în așa fel încât să rămână piramida $B'AD'C$. Aflați volumul acestei piramide. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 138

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Ordonând crescător șirul de numere $4\sqrt{10}$; $5\sqrt{6}$; 12; $7\sqrt{3}$; $\sqrt{145}$; $9\sqrt{2}$, primul element din șir va fi numărul ... . (5p)

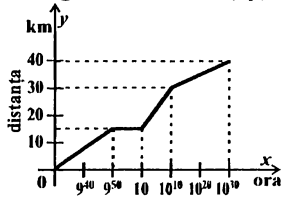
2. Numărul numerelor întregi din intervalul I =[-2,5; $\sqrt{7}$] este egal cu ... .(5p)

3. Calculând $(x-2)(x^2+2x-3)$ se obține ... . (5p)

4. Diametrul unui cerc este de 10 m. Aria discului este egală cu ... m^2. (5p)

5. Volumul unui cub este de 125 hm^3. Diagonala cubului este egală cu ... hm. (5p)

6. În figura alăturată, pe axa *Ox* este înscris timpul (în ore și minute), iar pe axa *Oy* este distanța unui tren față de stația de plecare (în km). Dacă citim ora 10^{10}, trenul se află la km .... (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, o prismă patrulateră regulată *ABCDA'B'C'D'* și diagonala sa [*DB'*]. (5p)

2. Calculați media geometrică a numerelor $x=\left|2\sqrt{5}+4\right|$ și $y=\left|4-2\sqrt{5}\right|$. (5p)

3. Se dau numerele $x=\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{3}{\sqrt{72}}$ și $y=(7\sqrt{8}-5\sqrt{18})^{-1}$.

a) Calculați suma celor două numere. (5p)

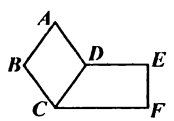
b) Calculați suma inverselor celor două numere. (5p)

4. Dacă $a^2=b^2+12$ și $b=5-a$, calculați $a-b$. (5p)

5. Știind că numărul real $x \in [-2; 4]$. Determinați intervalul căruia îi aparține numărul $\frac{2x-1}{2}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată sunt prezentate schematic, un parc de joacă pentru copii, *ABCD*, și o terasă *CDEF*. *ABCD* este un romb cu $m(\sphericalangle BAD)=60°$, *CDEF* este un trapez dreptunghic cu $DE=8$ m, $CF=12$ m și $EF=x$ m.



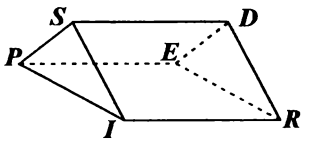
a) Exprimați în funcție de *x* aria terasei *CDEF*. (5p)

b) Arătați că perimetrul parcului de joacă *ABCD* este egal cu $4\sqrt{16+x^2}$. (5p)

c) Determinați valoarea lui x, dacă punctul B este simetricul punctului E față de punctul D. (5p)

d) Se acoperă parcul de joacă și terasa cu gresie. Dacă CD=8 m, verificați dacă sunt suficienți 100 m^2 de gresie pentru acoperirea celor două suprafețe. (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic un cort. *SPIDER* este o prismă triunghiulară dreaptă cu baza triunghiul ΔSPI echilateral, iar SP=2 m și înălțimea SD = 3 m.



a) Aflați suma lungimilor tuturor muchiilor prismei. (5p)

b) Verificați dacă ajung 18 m^2 de pânză pentru confecționarea acestui cort știind că intrarea reprezentată de triunghiul *SPI* și partea de jos (dreptunghiul *PIRE*) nu conțin pânză. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 139

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Fracția zecimală 5,75 scrisă ca fracție ordinară ireductibilă este egală cu ... . (5p)

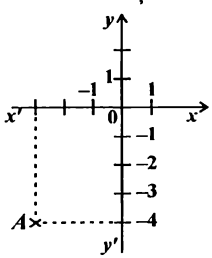
2. Se dau mulțimile: A = {1; 2; 3; 4} și B = {1; 2; 5; 6; 7}.
A ∪ B este egal cu {...}. (5p)

3. Probabilitatea ca aruncând la întâmplare două zaruri să se obțină o dublă este egală cu ... . (5p)

4. Perimetrul unui triunghi dreptunghic isoscel cu cateta de 4 dm este egal cu ... dm. (5p)

5. O piramidă patrulateră regulată are volumul egal cu 16 dam^3. Dacă latura bazei este de 4 dam, înălțimea piramidei este de ... dam. (5p)

6. Coordonatele punctului A reprezentat în figura alăturată sunt (..., ...). (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați pe foaia de examen un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ și diagonala sa $[B'D]$. (5p)

2. Într-un coș sunt 16 mandarine și de trei ori mai multe mere. Câte fructe sunt în coș? (5p)

3. Situația notelor obținute la teza de matematică de elevii unei clase a VIII-a este următoarea:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. de elevi	2	3	4	5	6	3	2

a) Ce medie au obținut la teză elevii clasei a VIII-a? (5p)

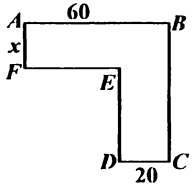
b) Ce note ar fi trebuit să primească cei doi elevi care au luat nota 4 pentru ca media clasei să fie mai mare de 7,40 ? (5p)

4. Fie punctul $C(-2; 0)$. Calculați distanța de la punctul O la dreapta BC, unde $B(3; 2)$ și O este originea sistemului de axe perpendiculare xOy. (5p)

5. Arătați că $x^2 + 26x + 170 \geq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată, este reprezentată schematic, o grădină. $AB=BC=60$ m, $DC=20$ m, $AF=x$ m, $0 < x < 60$ m.



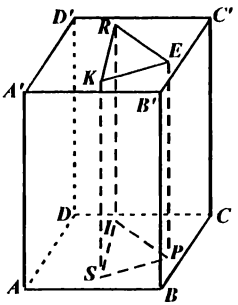
a) Exprimați în funcție de x suprafața grădinii. (5p)

b) Calculați perimetrul grădinii. (5p)

c) Determinați valoarea lui x, știind că segmentul BE împarte grădina în două suprafețe egale. (5p)

d) Proprietarul împrejmuiește grădina cu un gard. Știind că 1 m de gard costă 102 lei și $x = 20$ m, verificați dacă ajung 22222 lei pentru a construi gardul. (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic o piesă turnată, din fontă, având forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$, și un gol reprezentat de prisma triunghiulară regulată $SPIKER$. Se știe că $AB = EP = 12$ cm, $SP = 4$ cm.



a) Calculați volumul prismei $SPIKER$. (5p)

b) Verificați dacă ajung 500g de vopsea pentru a vopsi toată piesa, știind că 0,5 g de vopsea acoperă 1 cm^2 din suprafața piesei. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 140

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Inversul numărului real $-\frac{5}{6}$ este egal cu ... . (5p)

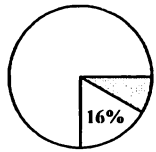
2. Cel mai mic număr întreg de 3 cifre este ... . (5p)

3. Elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} / x / 12\}$ sunt {...}. (5p)

4. Măsura unui unghi înscris într-un cerc este de 30°. Măsura arcului de cerc cuprins în interiorul unghiului este de ... °. (5p)

5. Diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 cm, 4 cm şi 5 cm, are lungimea egală cu ... cm. (5p)

6. În figura alăturată porţiunea haşurată reprezintă ... % din suprafaţa discului. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.

1. Desenaţi pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$ şi diagonala sa $[A'C]$. (5p)

2. Suma a două numere naturale este 108. Dacă împărţim pe unul la celălalt obţinem câtul 2 şi restul 3. Aflaţi numerele. (5p)

3. Un comerciant are de vândut următoarele cantităţi de mere: 25 kg cu 2 lei/kg; 40 kg cu 2,5 lei/kg şi 15 kg cu 4,4 lei/kg.

a) Câţi lei va încasa pe toată cantitatea de mere? (5p)

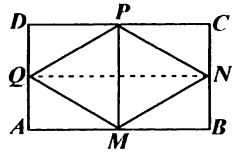
b) Dacă se amestecă merele, aflaţi preţul unui kilogram de amestec. (5p)

4. Fie expresia $E(x)=\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x^2-4x+4}+\frac{x+2}{x+3}:\frac{x^2-4}{x^2-9}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;0;2;3\}$. Arătaţi că $E(x)=\frac{x+1}{x}$. (5p)

5. Arătaţi că $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2008+8}\notin\mathbb{Q}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.

1. În figura alăturată este ilustrată schematic pardoseala unui salon, $ABCD$ fiind un dreptunghi cu AB=20 m şi BC=8 m. Punctele M, N, P şi Q sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ respectiv, $[AD]$.



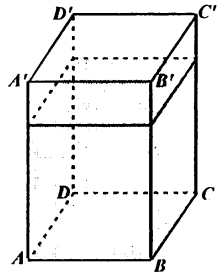
a) Demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este romb. (5p)

b) Aflaţi aria salonului $ABCD$. (5p)

c) Aflaţi aria rombului $MNPQ$. (5p)

d) Salonul se placheză cu gresie de două feluri astfel: rombul $MNPQ$ cu gresie care costă 52,4 lei/m^2 şi în rest cu gresie care costă 47,60 lei/m^2. Ştiind că la placare se pierde 10% din gresie, să se afle ce sumă este necesară pentru achiziţionarea gresiei. (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic o vază pentru flori în formă de prismă patrulateră regulată dreaptă. Se știe că $BC=10$ cm și $AA'=40$ cm.



a) Aflați tangenta unghiului format de diagonala prismei BD' cu planul (ADD'). (5p)

b) Câți litri de apă trebuie să turnăm în vază pentru ca nivelul său să fie $\frac{3}{4}$ din înălțime. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• *Test 141*

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $\sqrt{45}-3\sqrt{5}$ este egal cu ... . (5p)

2. Dacă $\sqrt{\overline{2xy}} \in \mathbb{N}$, atunci $\overline{2xy} \in \{...\}$. (5p)

3. Într-o cutie se află 15 bomboane cu alune și 12 bomboane cu stafide. Probabilitatea ca, o bomboană luată la întâmplare să fie cu stafide, este egală cu ... . (5p)

4. Într-un cerc, razele OA și OB sunt perpendiculare. Măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu ...°. (5p)

5. Aria laterală a unui cub este egală cu 256 cm^3. Muchia acestui cub este de ... cm. (5p)

6. Un elev are la sfârșitul anului școlar, mediile înscrise în tabelul de mai jos. Media generală a elevului este egală cu ... . (5p)

Media	8	8,50	9	9,50	10
Numărul mediilor	3	4	1	4	3

Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată $OABC$, cu vârful O. (5p)

2. Un elev a depus la bancă suma de 1000 de lei cu o dobândă de 12% pe an. Ce sumă va avea elevul în bancă, după un an? (5p)

3. Într-un sistem de axe perpendiculare xOy se consideră punctele $A(1; 3)$ și $B(2; 5)$.

a) Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a cărei reprezentare este dreapta AB. (5p)

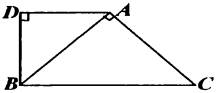
b) Arătați că lungimea segmentului $[AB]$ este egală cu $\sqrt{5}$ unități de lungime și, apoi, determinați coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$. (5p)

4. Simplificați raportul $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. (5p)

5. Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, numărul $N = x^2 - 4x + 5$ este pozitiv. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată sunt ilustrate schematic, un strat de gazon ABD și un strat cu flori ABC. $m(\sphericalangle BDA) = m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AD = BD = x$ (m), iar $AB = AC$.

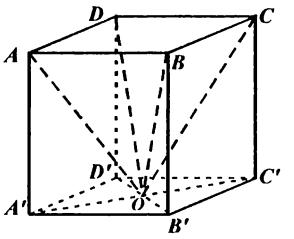


a) Exprimați în funcție de x suprafața stratului cu flori ABC. (5p)

b) Arătați că suma suprafețelor celor două straturi este egală cu $1{,}5x^2$ m^2. (5p)

c) Pentru ce valoare reală a lui x, suprafața stratului cu flori este cu 18 m^2 mai mare decât suprafața stratului cu gazon? (5p)

d) Se consideră $AD = 6$ m. O persoană plantează lalele pe marginea BC începând din punctul B. Câte lalele trebuie plantate, știind că distanța dintre ele este de 30 cm? (5p)



2. Figura alăturată, reprezintă schematic, un bloc de piatră în care s-a săpat un rezervor. Blocul este cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 2$ m, iar rezervorul pentru apă este sub formă de piramida patrulateră regulată cu baza $ABCD$ și vârful punctul O, centrul feței $A'B'C'D'$ a cubului.

a) Calculați aria totală a piramidei $OABCD$. (5p)

b) Câți litri de apă încap în rezervorul $OABCD$? (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 142

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rădăcina pătrată a numărului 961 este egală cu ... . (5p)

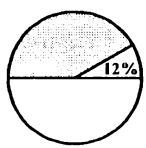
2. Numărul întreg din intervalul $\left(-\sqrt{8}; -\sqrt{2}\right)$ este egal cu ... . (5p)

3. Inversul numărului rațional $-1{,}5$ exprimat prin fracție ordinară ireductibilă este egal cu ... . (5p)

4. Aria unui romb cu latura de 6 cm și înălțimea de 3 cm este egală cu ...cm^2 (5p)

5. Un tetraedru regulat are muchia de 12 cm. Aria totală a tetraedrului este egală cu ... cm^2. (5p)

6. Partea haşurată din figura alăturată reprezintă ...% din suprafața discului. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați pe foaia de examen, o prismă patrulateră regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ și centrul bazei $ABCD$. (5p)

2. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{23x}$ divizibile cu 3. (5p)

3. La o fabrică de prelucrare a laptelui s-au adus 1500 litri de lapte din care se prepară smântână. Laptele conține 20% smântână.

a) Ce cantitate de smântână se obține din 1500 l de lapte? (5p)

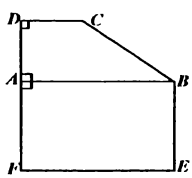
b) Toată smântâna obținută se pune în pungi de câte 500 ml fiecare. Câte pungi sunt necesare? (5p)

4. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, unde a și b sunt numere reale. Aflați a și b știind că graficul funcției conține punctele $A(-2;-11)$ și $B(\frac{1}{2};-1)$. (5p)

5. Simplificați raportul: $F(y)=\dfrac{y\cdot(y-2)+1}{y\cdot(y-3)+2}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată este ilustrată schematic o grădină de legume în care $ABCD$ este un trapez dreptunghic și $ABEF$ un dreptunghi. Se știe că: $AD = DC = 12$ m, $AF = 8$ m, $AB = x$ m.



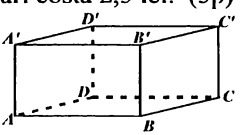
a) Exprimați în funcție de x aria dreptunghiului $ABEF$.(5p)

b) Exprimați în funcție de x aria trapezului $ABCD$. (5p)

c) Pentru ce valoare a lui x aria dreptunghiului este egală cu aria trapezului dreptunghic. (5p)

d) Se consideră $AB = 36$ m. O persoană cultivă jumătate din suprafața grădinii cu roșii iar cealaltă jumătate cu gogoșari. Producția medie pe metru pătrat cultivat este de 10 kg roșii și, respectiv, 7 kg gogoșari. Care este suma încasată de persoană, dacă vinde toată producția obținută, știind că 1 kg de roșii costă 1,5 lei iar 1 kg de gogoșari costă 2,5 lei. (5p)

2. Figura alăturată reprezintă schematic un bazin de înot sub forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = 50$ m, $BC = 40$ m, $AA' = 5$ m.



a) Dacă bazinul se umple cu apă, aflați cantitatea de apă din bazin. (5p)

b) Aflați câți metri pătrați de gresie trebuie pentru a placa bazinul. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 143

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Numărul rațional mai mare de 1000 de ori decât –4,78 este egal cu .... (5p)

2. Ordinea crescătoare a numerelor: $a = -0{,}75$; $b = -\frac{5}{6}$; $c = -\frac{7}{8}$ este .... (5p)

3. Mulțimea numerelor întregi din intervalul $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$ este $\{...\}$. (5p)

4. Bazele unui trapez au lungimile de 12 m, respectiv 8 m. Lungimea liniei mijlocii a trapezului este egală cu ...m. (5p)

5. Aria totală a unui tetraedru regulat este egală cu $9\sqrt{3}$ dm^2. Muchia acestui tetraedru este de ... dm. (5p)

6. Toți elevii unei clase au susținut teza la limba română. Rezultatele obținute sunt reprezentate în tabelul de mai jos. Conform tabelului, clasa are un număr de ... elevi. (5p)

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	3	4	4	6	3	2

Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza ABC triunghi echilateral și o diagonală a uneia din fețele sale laterale. (5p)

2. Media aritmetică a două numere naturale consecutive este egală cu 10,5. Aflați cele două numere. (5p)

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Graficul funcției conține punctele $A(1; -2)$ și $B(-2; -8)$.

a) Reprezentați grafic funcția f, într-un sistem de axe perpendiculare xOy. (5p)

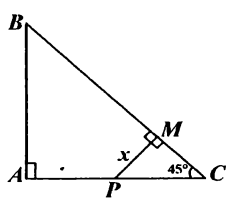
b) Pentru $a = 2$ și $b = -4$, aflați numerele reale x pentru care $f(x)$ se află în intervalul $[-3; 2]$. (5p)

4. Dacă $x + y = 11$ și $x \cdot y = 24$, calculați $x^2 + y^2$. (5p)

5. Dacă x și y satisfac relația $x^2 + y^2 - 4y + 2x + 5 = 0$, arătați că $2x + y = 0$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată sunt ilustrate schematic pardoseala unei bucătării $ABMP$ și pardoseala unei cămări PMC. $MP = x$, (x este o distanță exprimată în metri, $x > 0$), $m(\sphericalangle C) = 45°$, $m(\sphericalangle A) = 90°$, P este mijlocul segmentului (AC) și $PM \perp BC$.

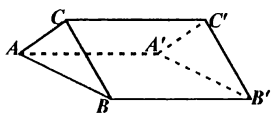


a) Exprimați în funcție de x aria pardoselii cămării PMC. (5p)

b) Arătați că aria pardoselii bucătăriei $ABMP$ este egală cu $(3{,}5x^2)$m^2. (5p)

c) Determinați valoarea lui x știind că aria pardoselii bucătăriei $ABMP$ este cu 12 m^2 mai mare decât aria pardoselii din cămara MPC; (5p)
d) O persoană cumpără gresie pentru bucătăria $ABMP$ și pentru cămara MPC. Un metru pătrat de gresie pentru bucătărie costă 85 lei, iar pentru cămară, un metru pătrat de gresie este mai ieftin cu 20%. Dacă $x = 2$ m, calculați cât a costat toată gresia. (Se consideră că se pierde câte 0,5 m^2 de gresie pentru fiecare încăpere). (5p)

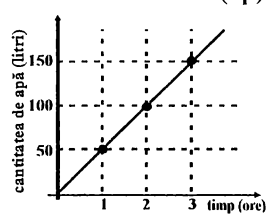
2. Figura alăturată reprezintă schematic acoperișul unei case. $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu baza un triunghi echilateral, ABC. Se știe că: $AB = 6$ m și $BB' = 12$ m.



a) Calculați volumul prismei $ABCA'B'C'$. (5p)
b) Câți metri pătrați de tablă sunt necesari pentru acoperișul casei? (5p)
Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• *Test 144*

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.
1. Rezultatul calculului $(14x - 6x) : 2$ este egal cu ... . (5p)
2. Dintre numerele $a = 1,6(3)$ și $b = 1,63$ mai mare este numărul ... . (5p)
3. 30% din 450 lei este egal cu ... lei. (5p)
4. Aria unui disc cu raza de 5 cm este egală cu ...π cm^2. (5p)
5. Diagonala unui cub cu muchia de $2\sqrt{3}$ cm este egală cu ...cm. (5p)
6. Un bazin se umple cu ajutorul unui robinet. Cantitatea de apă din bazin după un timp t poate fi exprimată cu ajutorul graficului alăturat. Conform graficului, după două ore, în bazin se află ... ℓ apă. (5p)



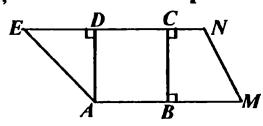
Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.
1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $MNPQ$. (5p)
2. Dan are 40 lei iar Andrei de trei ori mai mult. Câți bani au, în total, cei doi prieteni? (5p)
3. Pentru copiii unui orfelinat s-au pregătit pachete-cadou de Crăciun care conțin banane și portocale, în total 8 fructe. O banană costă 0,80 lei, iar o portocală costă 0,60 lei.
a) Care este prețul maxim al unui pachet-cadou? (5p)
b) Dacă la pachetul-cadou se adaugă o jucărie de 5 lei, care este prețul minim al acestuia? (5p)

4. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ și $g(x) = bx + a$, unde $a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq b$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții. (5p)

5. Arătați că numărul $n = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) + 1$ este un pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural x. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată, sunt reprezentate schematic trei loturi de teren. $ABCD$ este un pătrat cu latura de 12 cm, $BMNC$ este un trapez dreptunghic cu $CN = x$ cm, $BM = 16$ cm, iar ΔADE este dreptunghic unde $DE = y$ cm.



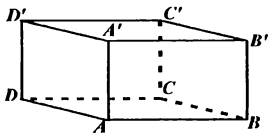
a) Exprimați în funcție de x aria trapezului $BMNC$. (5p)

b) Aflați x astfel încât loturile $ABCD$ și $BMNC$ să aibă aceeași arie. (5p)

c) Aflați y astfel încât aria lotului $ABCD$ să fie egală cu aria lotului ADE. (5p)

d) Dacă $x = 8$ și $y = 24$ aflați aria celor trei loturi de teren. (5p)

2. Figura alăturată, reprezintă schematic un acvariu în formă de paralelipiped dreptunghic cu $AB = 12$ dm, $BC = 6$ dm, $AA' = 8$ dm.



a) Aflați aria totală a paralelipipedului dreptunghic. (5p)

b) Verificați dacă în acvariu încap 600 ℓ apă. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 145

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $(-2x^6) + (2\sqrt{2}\,x^3)^2$ este egal cu ... . (5p)

2. Dacă $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, atunci suma $a + b$ este egală cu ... . (5p)

3. Dacă $3x + 7 \geq 0$, atunci x aparține intervalului [...; ...). (5p)

4. Perimetrul unui pătrat este de 48 cm. Lungimea laturii pătratului este egală cu .... cm. (5p)

5. Volumul piramidei patrulatere regulate cu aria bazei de 16 cm^2 și înălțimea de 9 cm este egal cu .... cm^3. (5p)

6. Toți elevii unei clase au susținut teza la matematică. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul alăturat. Media clasei la teză este egală cu ... . (5p)

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	2	3	4	6	4	3	3

Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați pe foaia de examen o piramidă triunghiulară regulată de vârf V și de bază ABC. (5p)

2. Suma a două numere naturale este 124 iar unul dintre ele este de trei ori mai mare decât celălalt. Care sunt numerele? (5p)

3. Să se determine trei numere direct proporționale, respectiv, cu numerele 4; 6; 8 astfel încât:

a) Primul număr să fie 24; (5p)

b) Suma numerelor să fie 216. (5p)

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 4$. Verificați dacă punctele $P(1; 3)$; $Q(-2; 6)$; $R(4; 0)$ sunt coliniare. (5p)

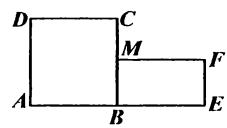
5. Fie expresia:

$$E(x) = \left(\frac{7}{x+1} : \frac{x-1}{x} - \frac{21}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{7}\right) \cdot \frac{8x-8}{4x-3} \text{ unde}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, 0, 1, \frac{3}{4}\right\}$. Arătați că $E(x) = \frac{8}{x+1}$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura alăturată este ilustrată schița unui teren unde $ABCD$ este un pătrat cu latura de 12 dam iar $BEFM$ un dreptunghi cu $MB = x$ dam $(0 < x < 12)$ și $BE = 16$ dam.



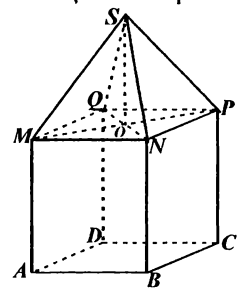
a) Exprimați în funcție de x aria dreptunghiului $BEFM$. (5p)

b) Arătați că aria întregului teren este egală cu $16(9 + x)$ dam^2. (5p)

c) Pentru ce valoare a lui x aria pătratului $ABCD$ este egală cu aria dreptunghiului $BEFM$? (5p)

d) Dacă $BM = 9$ dam și terenul este cultivat cu grâu iar producția medie la hectar este de 4,5 tone, să se afle ce producție a fost obținută de pe tot terenul. (5p)

2. Figura de mai jos reprezintă schematic un cort, unde $ABCDMNPQ$ este un paralelipiped dreptunghic și $SMNPQ$ este o piramidă patrulateră regulată. $ABCD$ este un pătrat cu latura de 4 m, $AM = 2$ m iar înălțimea piramidei $SO = 2\sqrt{3}$ m.



a) Calculați volumul de aer din cort. (5p)

b) Verificați dacă ajung 65 m^2 de pânză pentru confecționarea cortului. (5p)

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test 46

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $18 - 6 : 2$ este numărul natural ... . (5p)

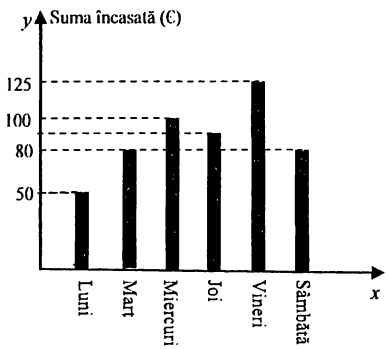
2. Se consideră intervalul $I = (-3, 3]$. Cel mai mic element al mulțimii $I \cap \mathbb{Z}$ este numărul .... . (5p)

3. Restul obținut la împărțirea numărului 190 la 30 este numărul ... . (5p)

4. Perimetrul pătratului cu aria de 49 m^2 este egal cu ... m. (5p)

5. Aria totală a unui tetraedru regulat este $36\sqrt{3}$ dm^2. Lungimea muchiei tetraedrului este egală cu ... dm. (5p)

6. Nick a reprezentat printr-un grafic, timp de o săptămână, încasările zilnice ale tatălui său, care are o mică afacere. Folosind graficul întocmit de Nick, aflați care a fost suma totală încasată de tatăl său în acea săptămână. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară regulată $SABC$ cu înălțimea $[SO]$. (5p)

2. Pe o hartă cu scara de 1:500000 distanța dintre două localități A și B este de 20 cm. Aflați distanța reală dintre cele două localități (în km). (5p)

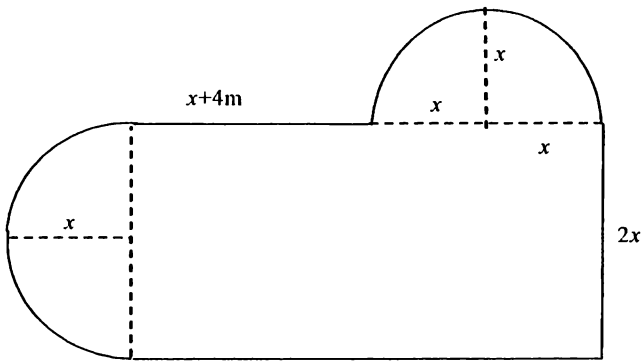
3. Prețul de vânzare al unui televizor, cu TVA de 19% a fost de 3570 lei.
a) Care ar fi costul aceluiași televizor, fără TVA? (5p)
b) Cu câți lei s-a scumpit televizorul datorită creșterii TVA la 24%? (5p)

4. Eduard are la matematică notele 7, 4, 6, 7 la oral și nota 7 la teză. Mai are de primit o singură notă și își dorește să obțină media 7. Care este nota minimă pe care ar trebui s-o primească Eduard pentru a obține media 7? (5p)

5. Diferența a două numere reale a și b este 4, iar suma pătratelor celor două numere este egală cu 58. Aflați produsul numerelor a și b. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În figura următoare este reprezentată o piscină (formată dintr-un dreptunghi și două semicercuri), iar x reprezintă o distanță exprimată în metri. Piscina urmează a fi înconjurată, pe margine, cu un parapet, iar fundul acesteia urmează să fie vopsit cu o vopsea specială, rezistentă la apă.



a) Exprimați în funcție de x lungimea parapetului ce urmează a fi construit în jurul piscinei. (5p)

b) Determinați x știind că lungimea parapetului este egală cu $(32+8\pi)$ m. (5p)

c) Dacă $x = 4$ m, iar construirea unui metru liniar de parapet costă 60 lei, arătați că suma necesară pentru construirea parapetului este mai mică decât 3500 lei. (5p)

d) Știind că $x = 4$ m și că se consumă 3 litri de vopsea pentru 20 m^2, stabiliți dacă pentru vopsirea fundului piscinei este suficientă cantitatea de 27 de litri de vopsea. (Se va considera $3,14 < \pi < 3,15$) (5p)

2. Dintr-o prismă dreaptă din lemn, cu baza pătrat de latură 20 cm și înălțimea de 40 cm, $ABCDA'B'C'D'$ (**fig.1**) se obține, prin prelucrare într-un atelier de tâmplărie, o piesă de forma celei din **fig.2**: o prismă dreaptă $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu baza pătratul $ABCD$, cu o scobitură, $EFGHE'F'G'H'$ și un cep, $MNPQM'N'P'Q'$, fiecare având formă de cub cu latura de 10 cm.

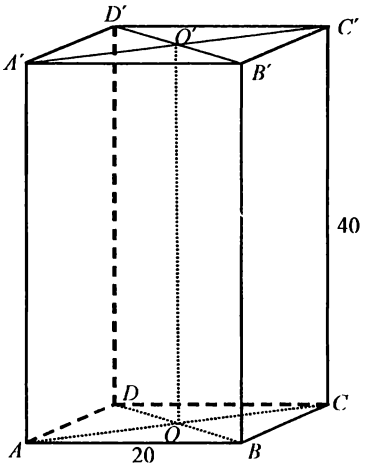


Fig.1

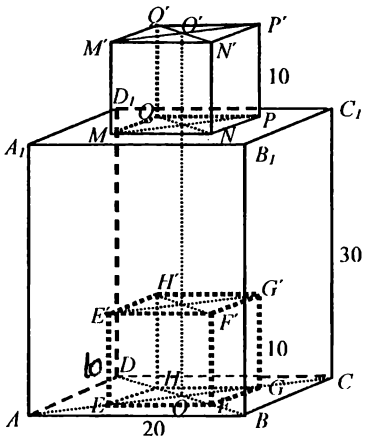


Fig.2

a) Aflați cât la sută din volumul prismei $ABCDA'B'C'D'$ reprezintă volumul piesei obținute prin prelucrare. (5p)

b) Comparați ariile totale ale celor două corpuri. (5p)

Test 147

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $21 + 7 : 2 - 14$ este numărul rațional .... . (5p)

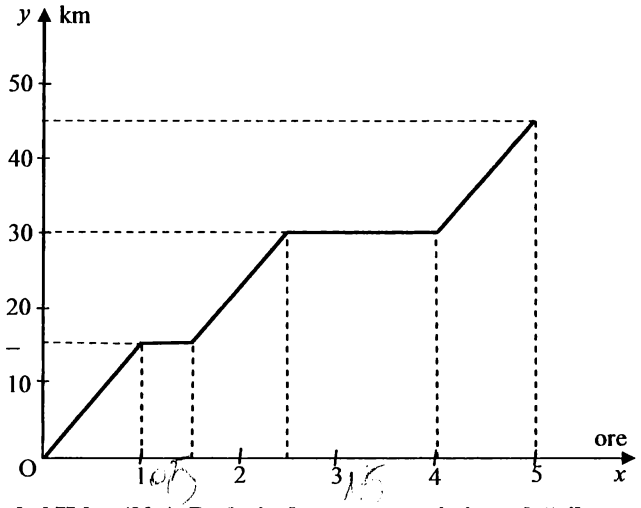
2. După introducerea factorilor sub radical, numărul $-6\sqrt{2}$ se scrie sub forma ... . (5p)

3. Dacă 1€ se poate cumpăra cu 4,40 lei, atunci pentru 400 € se va plăti suma de ... lei. (5p)

4. Dacă lungimea cercului circumscris unui triunghi dreptunghic ABC este egală cu 8π cm, atunci lungimea ipotenuzei $[BC]$ este egală cu ... cm. (5p)

5. O piramidă triunghiulară regulată are apotema de 10 dm. Dacă aria laterală a piramidei este egală cu 300 dm^2, atunci latura bazei piramidei are lungimea egală cu ... dm. (5p)

6. Graficul următor reprezintă deplasarea unui biciclist pe o distanță de 45 km. În timpul parcurgerii traseului, biciclistul a staționat în total ... ore. (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătrat. (5p)

2. Aflați numărul x știind că media geometrică a numerelor x și 12 este 18.(5p)

3. Bunicul lui George primește o pensie lunară de 900 lei din care este nevoit să aloce exact o treime pentru medicamente.

a) Ce sumă ar primi drept pensie în fiecare lună bunicul lui George dacă pensia ar fi impozitată cu 16%? (5p)

b) Ce sumă i-ar rămâne bunicului pentru celelalte cheltuieli dacă prețul medicamentelor de care are nevoie s-ar majora cu 40%? (5p)

4.Determinați coordonatele punctului de intersecție a reprezentărilor grafice ale funcțiilor: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2$. (5p)

5. Se consideră numărul $a=(x^2+x+1)^2-(2x-3)(x^2+1)-2x^2$, unde x este număr întreg. Arătați că $\sqrt{a}$ este număr natural. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. În **figura 1** de mai jos, este reprezentat un teren dreptunghiular $ABCD$ cu dimensiunile $AB = 120$ m și $BC = 48$ m împărțit în două parcele delimitate de gardul EF. Punctul E aparține laturii $[CD]$ astfel încât $EC = 30$ m, iar punctul F aparține laturii $[AB]$. Lungimea segmentului $[AF]$ exprimată în metri este egală cu x.

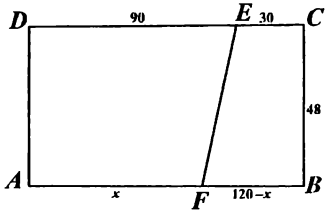


Fig. 1

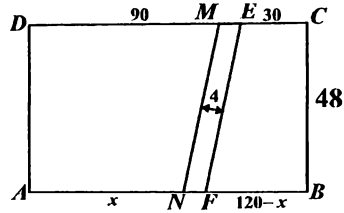


Fig.2

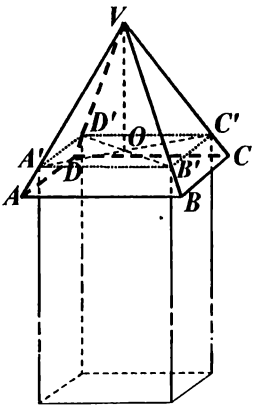
a) Exprimați în funcție de x aria parcelei $BCEF$. (5p)

b) Deterrminați x știind că aria parcelei $ADEF$ este de două ori mai mare decât aria parcelei $BCEF$. (5p)

c) Dacă $x = 70$ m, aflați lungimea gardului EF. (5p)

d) De-a lungul gardului se construiește o alee $EFNM$ ($MN \parallel EF$) **(figura 2)** cu lățimea de 4 m. Aflați cât costă amenajarca alcii, știind că pentru 1 m^2 de alee se plătește suma de 33 lei. (5p)

2. În figura alăturată este reprezentat, schematic, acoperișul unui turn. Turnul are formă de prismă dreaptă cu baza pătrat de latură 6 m, iar acoperișul este o piramidă patrulateră regulată, $VABCD$, cu latura bazei de 7 m. Înălțimea acoperișului, VO, este egală cu jumătate din lungimea diagonalei bazei turnului (s-a notat cu O centrul bazei superioare a turnului).



a) Determinați volumul spațiului din podul turnului. (5p)

b) Dacă acoperișul este învelit cu tablă, determinați, cu aproximație de o unitate prin adaos, câți metri pătrați de tablă s-au folosit știind că pierderile datorate îmbinărilor au fost de 2%. (5p)

Test 148

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

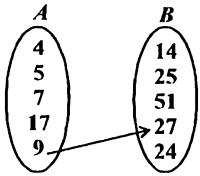
1. Rezultatul calculului $\sqrt{3^3} - \sqrt{48} : 4$ este egal cu ... . (5 p)

2. Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} / 48 \leq x^2 \leq 101\}$ este egală cu $\{...\}$. (5 p)

3. Într-o urnă sunt 12 bile albe și 18 bile negre. Probabilitatea ca, extrăgând din urnă o bilă la întâmplare, aceasta să fie neagră este egală cu ... . (5 p)

4. Perimetrul unui trapez isoscel este de 58 cm. Știind că linia mijlocie a trapezului are lungimea de 16 cm, atunci latura neparalelă a trapezului este egală cu ... cm. (5 p)

5. Aria laterală a unei prisme patrulatere regulate drepte cu aria unei fețe laterale egală cu 18 cm^2, este egală cu ... cm^2. (5 p)



6. Completați cu săgeți de la elementele mulțimii A către elementele mulțimii B astfel încât propoziția „y este divizibil cu x" este adevărată, unde $x \in A$ și $y \in B$. (5 p)

Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCDA'B'C'D'$ trasând diagonalele acestuia. (5 p)

2. O mașină consumă la 100 km parcurși 7,5 l benzină. Cât consumă aceeași mașină pentru un drum cu lungimea de 900 km? (5 p)

3. Colegii care participă la aniversarea zilei de naștere a lui Victor vor să-i cumpere un cadou. Dacă fiecare contribuie cu 23 de lei nu ajung 24 de lei. Dacă în schimb fiecare contribuie cu 27 de lei sunt în plus 24 de lei pentru deplasarea cu microbuzul.

a) Câți copii participă la aniversarea lui Victor? (5 p)

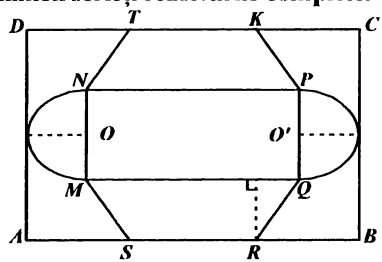
b) Cât costă cadoul? (5 p)

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 3$. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația $\frac{f(x)}{-3} \geq -2$. (5 p)

5. Arătați că $\sqrt{x^2-18x+81}+\sqrt{x^2-24x+144} \in \mathbb{N}$, pentru orice $x \in [9; 12]$. (5 p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1. Figura alăturată reprezintă schematic un teren de sport împrejmuit de gardul $ABCD$ care are formă de dreptunghi. Terenul este format din dreptunghiul $MNPQ$ și două semi-discuri cu centrele în punctele O și O', mijloacele segmentelor $[MN]$ și, respectiv, $[PQ]$. Pentru spectatori s-au construit două tribune $NPKT$ și $MQRS$ în formă de trapeze isoscele congruente. Se știe că $MQ = 24$ m și $MN = 12$ m. Aflați:



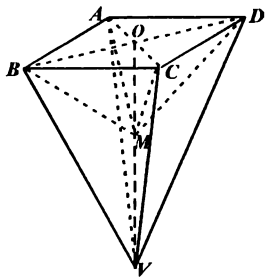
a) suprafața terenului de joc, dacă $\pi \simeq 3,14$. (5 p)

b) lungimea gardului $ABCD$ știind că înălțimea trapezului $MQRS$ este egală cu 5 m. (5 p)

c) raportul dintre aria terenului de joc şi aria dreptunghiului $ABCD$, cu aproximaţie de $\frac{1}{100}$ prin lipsă. (5 p)

d) Dacă 1 m^2 de gazon costă 100 lei, aflaţi cât a costat gazonul necesar pentru acoperirea terenului de joc. (5 p)

2. Un meşter taie dintr-o bucată de lemn o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ (figura alăturată), apoi cu o daltă realizează în ea o scobitură tot în formă de piramidă regulată $MABCD$, pe care o căptuşeşte cu o folie de plastic. Se ştie că $AB = 20$ cm iar suprafaţa foliei utilizate este egală cu 800 cm^2 (se neglijează îmbinările).



a) Aflaţi unghiul format de planul (VAB) cu planul (ABC). (5 p)

b) În scobitura piramidală $MABCD$ încap 1,4 ℓ de suc, dacă $MV = 4\sqrt{3}$ cm? (5 p)

Test 1. 1. a) 7; **b)** 1; **c)** 1850; **3.** 680. **4. a)** 0; **b)** 38500; **c)** 81; **d)** $a = 8$; $b = 9$; $c = 10$. **5.** 128; 137; 146; 236; 245.

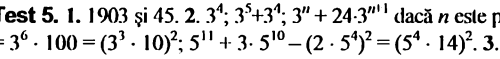
Test 2. 1. a) 8; **b)** 8; **c)** 1000. **2. a)** 56; **b)** 210; **c)** 1. **3.** 51. **4.** $(a,b) \in \{(2,15), (13,4)\}$. **5.** 25 copii și 12000 lei. **6.** $(8 \cdot 10 + 0) + (8 \cdot 10 + 1) + ... + (8 \cdot 10 + 7) = 668$.

Test 3. 1. 200. **2. a)** 28; **b)** 21. **3.** 2992 și 995. **4.** $U(a) = 3$, deci a nu este pătrat perfect. **5.** 60 Km/h. **6.** A ={150, 152, 154, 156, 158}. B = {400, 410,..., 490, 405, 415,..., 495}; C = {170}; D = {272; 474; 676; 878}.

Test 4. 1. a) F; **b)** F; **c)** F; **d)** A; **e)** F. **2.** 21 de numere. **3.** $U(N) = 7$ etc. **4.** 5 870. **5.** 12; 13 sau 3, 4, 5, 6, 7. **6.**30.

Test 5. 1. 1903 și 45. **2.** 3^4; 3^5+3^4; $3^n + 24 \cdot 3^{n-1}$ dacă n este par; $3^6 + 33 \cdot 3^7 = 3^6 \cdot (1 + 33 \cdot 3) = 3^6 \cdot 100 = (3^3 \cdot 10)^2$; $5^{11} + 3 \cdot 5^{10} - (2 \cdot 5^4)^2 = (5^4 \cdot 14)^2$. **3.** 64. **4. a)** 7; **b)** 5; **c)** 0; **d)** 3; **e)** 10; **f)** 3; **g)** 3; **h)** orice număr natural nenul; **i)** 9. **5.** ∅; {7}; {8}; {9}; {7; 8}; {7; 9}; {8; 9}; {7; 8; 9}. **6.** A = {0; 1; 2; 3}; B = {1; 2; 3; 4; 5}; C = {0; 1; 2; 3; 4; 5} etc.

Test 6.1. b; **2.** a; **3.** b; **4.** d; **5.** a; **6.** c; **7.** a; **8.** d; **9.** a; **10.** 4489 și 45; **11.** A ={0, 1, 2, 3, 4}; B ={1, 2, 3, 4, 5, 6}; C ={0, 1, 2, 3, 4, 5}; A ∪ B ∪ C ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; A ∩ C = {0, 1, 2, 3, 4}; A \ B = {0}; B \ C = {6}. **12. a)** 47; **b)** 45; **c)** 83.

Test 7. 1. 

. **2.** $\frac{10}{12}; \frac{15}{18}; \frac{20}{24}; \frac{25}{30}; \frac{50}{60}$.

3. $\frac{42}{66}; \frac{49}{77}; \frac{56}{88}; \frac{63}{99}$. **4. a)** 1, 2, 4. **b)** 1, 2, 4; **c)** 2, 3, 5, 9; **d)** 1, 2, 3, 7; **e)** 1.

5. a) $\frac{3}{43}; \frac{15}{55}; \frac{3}{10}; \frac{3}{8}; \frac{3}{7}; \frac{30}{50}$; **b)** $\frac{3}{10}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{7}{10}; \frac{16}{20}; \frac{5}{2}; \frac{30}{4}$; **c)** $\frac{5}{18}; \frac{3}{9}; \frac{75}{180}; \frac{54}{108}; \frac{44}{72}; \frac{23}{36}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}$.

6. a) 1; 2; 3; 4; **b)** 3; 4; 5; 6; 7; **c)** 2; 3.

Test 8. 1. a) 2,99; 3,007; 3,045; 3,45; 3,461; 3,501; 4,07. **b)** 7,3211; 7,3212; 7,3219. **2. a)** 1,952; **b)** 2,9617; **c)** 3 145; **d)** 4 050, 5; **e)** 0,00203012; **f)** 0,14; **g)** 30 112 000. **3.** 301,2 și 323,7. **4.** 1 440 hl. **5.** Aplicați *principiul cutiei*. **6.** $\frac{14}{18}; \frac{35}{45}; \frac{70}{90}; \frac{21}{27}; \frac{28}{36}; \frac{56}{72}$.

Test 9. 1. a) 15; **b)** 11; **c)** 36; **d)** 3; **e)** 2; **f)** nu are soluție. **2.** 5 ani și 35 ani. **3. a)** 2 001; **b)** 2; **c)** 371,912. **4.** B = {3, 5, 6, 8} și A ={3, 5, 6, 11} sau A = {3, 5, 6, 1, 10} sau A ={3, 5, 6, 2, 9} sau A = {3, 5, 6, 4, 7}. **5.** 130m și 975 m^2. **6. a)** 2,1 m; **b)** 2 016 hl.

Test 10. 1. a) 0,002 km; **b)** 20 dm; **c)** 0,4 dam; **d)** 3 m. **2. a)** 2 400 g; **b)** 4,7 kg; **c)** 250 dag; **d)** 0,02 kg. **3. a)** 20 000 cm^2; **b)** 2 ha; **c)** 0,04 ari; **d)** 250 000 dm^2. **4. a)** 3 000 000 cm^3; **b)** $3 \cdot 10^6$ dm^3; **c)** 0,000004 dam^3; **d)** 2,5m^3. **5. a)** 700 cl; **b)** 17 dl; **c)** 0,4 *l*; **d)** 180 dl. **6. a)** 1000 *l*; **b)** 0,017 hl; **c)** 4 *l*; **d)** 0,0045 m^3; **e)** 1 782 cm^3; **f)** 0,0001414 dam^3; **g)** 0,002055 m^3; **h)** 0,000315 dam^3. **7.** 336 000 *l*. **8.** 421,875 *l*. **9.** 14,4 kg pe o parte a gardului. **10.** 70 cm.

Test 11. 1. a) 8; **b)** 14 și 28. **2. a)** $b = 0$ și a orice cifră din sistemul zecimal; **b)** {1410; 1440; 1470; 1425; 1455; 1485} etc. **3.** D_{12}= {1, 2, 3, 4, 6, 12} etc. **4.** $\overline{abc} \in \{479, 947\}$. **5.** $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. **6. a)** $(x, y) \in \{(0; 53), (1; 25), (3; 11), (7; 4), (6; 5), (13; 1)\}$; **b)** $(x, y) \in \{(0; 6), (2; 2), (4; 0)\}$. **7. a)** $n = (1 + 3) + (3^2 + 3^3) + ... + (3^{1998} + 3^{1999}) = (1 + 3) + 3^2(1 + 3) + ... + 3^{1998}(1 + 3)$; **b)** $n = (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^3(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + ... + 3^{1996}(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = M_{40}$; **c)** și **d)** $(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^4(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + ... = M_{121}$.

Test 12. 1. F. Pentru $n=13$, numărul este compus. **2. a)** 60 şi 4 320; **b)** 170 şi 404 600; **c)** 130 şi 18 200; **d)** 100 şi 3 600. **3.** 10; 12; 15; 20; 30; 60. **4. a)** Ultima cifră a numărului este 0. **b)** $A = 5050\cdot(5\cdot7\cdot11)^{2n-1}$. **c)** Suma cifrelor numărului este divizibilă cu 3. **5. a)** 14 şi 84; 28 şi 42; **b)** 18 şi 108; 36 şi 90; 54 şi 72; **c)** $a=60$; $b=15$. **6. a)** Scriind zecimal se obţine relaţia: $26a = 4b+7c$, de unde $c\in\{2, 4, 6, 8\}$. Se obţine $A = \{(1, 3, 2), (2, 6, 4), (3, 9, 6)\}$; **b)** $n = 15a + 11 = M5 + 1$ şi $n = 10b + 8 = M5 + 3$, imposibil.

Test 13. 1. 6 numere. **2.a)** 14 şi 41; **b)** $\overline{ab}\in\{10; 11; 20\}$; **c)** $\overline{ab}\in\{10; 11; 12; 20; 21; 30\}$. **3.** $n\in\{0; 1\}$; $m\in\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. **4.** $\frac{7}{24}; \frac{1}{3}; \frac{11}{24}; \frac{1}{2}; \frac{5}{8}; \frac{2}{3}; \frac{9}{12}; \frac{19}{24}; \frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{11}{12}$. **5.** Presupunem prin absurd că există $d\in\mathbb{N}$, d prim astfel încât: $d \mid 6n + 7$ şi $d \mid 10n + 11$. În acest caz rezultă că $d \mid 6n+7$ şi $d \mid 10n+11$ de unde $d \mid 5(6n+7)$ şi $d \mid 3(10n+11)$. Deci $d \mid 30n+35$ şi $d \mid 30n+33$, de unde $d \mid (30n+35)-(30n+33)$, adică $d \mid 2$ şi, cum d este prim rezultă că $d=2$. Deci $2 \mid 6n+7$, contradicţie.

Test 14. 1. a) $\frac{5}{3}$; **b)** $\frac{9}{16}$; **c)** $2\frac{7}{10}$; **d)** $\frac{11}{20}$; **e)** $\frac{4}{13}$; **f)** $1\frac{5}{12}$. **2. a)** $\frac{7}{15}$; **b)** $6\frac{1}{6}$; **c)** $1\frac{1}{5}$; **d)** 1; **e)** 0,0825. **3. a)** 17,25; **b)** 3; **c)** $\frac{3}{2}$. **4.** 49 şi 7. **5.** $\frac{5}{12}$. **6.** 48 m.

Test 15. 1. a) 2; **b)** 10; **c)** $\frac{4}{3}$. **2.** 10. **3. a)** $\frac{15}{4}$; **b)** $\frac{3}{2}$; **c)** 570. **4. a)** 42 şi 56; **b)** 7 şi 21; **c)** 81 şi 67. **5. a)** $\frac{7}{5}$; **b)** $\frac{7}{12}$; **c)** $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{4a}{7b}=\frac{12}{35}\Rightarrow\frac{4a}{4a+7b}=\frac{12}{12+35}=\frac{12}{47}$.

Test 16. 1. a) 6; **b)** 6; **c)** 36; **d)** 6″; **e)** 6. **2.** 400; 800; 1400. **3. a)** 39; 52; 78; 91; **b)** 6; 8; 12; 14. **4.** 8; 12; 16; 24; 32. **5.** Avem $a\cdot 0{,}(3) = b\cdot 0{,}25 = c\cdot 0{,}2$, de unde $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{120}{12}=10$, de unde $a=30$; $b=40$ şi $c=50$.

Test 17.1.a) 36125 lei. **b)** 5 zile. **2.** 3375 piese; **3.** $\frac{1}{5}$. **4.** Cazuri posibile sunt $6\cdot 6=36$; cazurile favorabile sunt: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), deci 5 cazuri. $P=\frac{5}{36}$.

Test 18. 1. a) 420 lei dobânda; 3920 lei. **b)** 6 %. **2.** 500 kg. **3.** 8,5 %. **4.** 27,(27)%. **5.a)** Cazuri favorabile = 8; cazuri posibile = 32. $P(A) = \frac{8}{32}=\frac{1}{4}$; **b)** Cazuri favorabile = 10; cazuri posibile = 100; $P(A) = \frac{1}{10}$. **6. a)** Cazuri favorabile $=\left[\frac{93}{5}\right]+1 = 18 + 1 = 19$; cazuri posibile = 95. $P(A)=\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$. **b)** Cazuri favorabile = 25; cazuri posibile = 35. $P(A) = \frac{25}{35}=\frac{1}{7}$

Test 19. 1. a) 16,5; **b)** 26,25; **c)** 0,288. **2. a)** 3500; **b)** 200 000; **c)** 8 000 000; **d)** 90000. **3. a)** $a+b=60\cdot 2=120$; $a+c=61\cdot 2=122$; $b+c=62\cdot 2=124$. $2(a+b+c) = 120 + 122 + 124 = 366$, de unde $a+b+c=183$. $c=183-120=63$; $b=183-122=61$; $a=183-124=59$. **4.** 25 000 lei. **5.** 712,5 g. **6.** 2200 lei.

Test 20. 1. a) 3; **b)** –48; **c)** 3; **d)** –8; **e)** 300. **2. a)** 2; **b)** 150; **c)** –1; **d)** 5; **e)** –8. **3. a)** –5; **b)** 13. **4. a)** –4; **b)** –10; **c)** 4; **d)** –1; **e)** 28; **f)** –8; **g)** –5; **h)** 1; **i)** –1; **j)** $\varnothing$. **5. a)** $x\in\{-3; -1; 1; 3\}$;

b) $x\in\{0; 2; 3; 5; 6; 8\}$; **c)** $x\in\{2; 4\}$. **6. a)** $\{-3; 3\}$; **b)** $\{-5; 9\}$; **c)** $\{-2\}$; **d)** $\{-2; 5\}$; **e)** $(x, y)\in\{(2; 6); (0; -14); (3; 1); (-1; -9); (6; -2); (-4; -6); (11; -3); (-9; -5)\}$; **f)** $(x, y)\in\{(8; 11); (6; -15); (20; -1); (-6; -3)\}$.

Test 21. 1. $-17; -15; -5; -|-4|; 0; (-5)^0; 3; |5|; |+7|$; 12. **2. a)** -2; **b)** 10; **c)** 24; **d)** 12; **e)** -1; **f)** 370; **g)** 2; **h)** 0; **i)** -1; **j)** $2\cdot(-1)^n=\begin{cases}2, \text{dacă } n \text{ este par}\\-2, \text{dacă } n \text{ este impar;}\end{cases}$ **k)** 1. **3.** $(A\cap B\cap D)\cup C = A\cup C = \{-1; 1; 9\}$.

4. a) 3; **b)** -8; **c)** ϕ; **d)** $\{(2,8), (0,-4), (3,5), (-1,-1), (4,4), (-2,0), (7,3), (-5,1)\}$; **e)** $\{-5, 5\}$; **f)** $(1, -1), (-3,-1)$; **g)** 54; **h)** $x\in\{1; 5\}$; **i)** $\varnothing$; **j)** $x\in\{-10;10\}$; **k)** $x\in\{-2; 2\}$; **l)** $(x, y)\in\{(0; 3); (2; -5); (-2; -5)\}$. **5.** 0.

Test 22. 1. a) $A = \{\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12; \pm24\}$; $B = \{\pm1; \pm2; \pm3; \pm6;\}$; $A\cup B = A$; $A\cap B = B$; $A \setminus B = \{\pm4; \pm8; \pm12; \pm24\}$. **b)** 0. **2. a)** 12 divizori; **b)** 32 divizori; **c)** 56 divizori; **d)** 72 divizori; **e)** 36 divizori; **f)** 8 divizori; **g)** 16; **h)** 14; **i)** 18. **3. a) 1.** $x\in\{-1, 0, 1, 2\}$; **2.** $x\in\{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$. **b)** 1. $x\in\{0, 1\}$; 2. $x\in\{2, 3\}$. **4. a)** $(x+1)(y+1) = 6 \Leftrightarrow x = 0$ şi $y = 5$ sau $x = 5$ şi $y = 0$ sau $x = 1$ şi $y = 2$ sau $x = 2$ şi $y = 1$. Deci se obţin numerele: 3^5; 2^5; $2\cdot3^2$; $2^2\cdot3$ etc. **5. a)** Orice număr întreg este de forma: $3k$ sau $3k-1$ sau $3k+1$.

Test 23. 1. a) 8; **b)** -6; **c)** -1; **d)** -21. **2. a)** $D_{12}\cap D_{18} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$, $D_{-8}\cap D_{12} = \{\pm1, \pm2, \pm4\}$; **b) 1)** $x\in\{-5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7\}$; **2)** $x\in\{1; 2\}$; **3)** 1; **4)** $x\in\{-4; -2; 0; 2\}$. **3. a)** $\varnothing$; **b)** $x\in\{5; -3\}$; **b)** ϕ; **c)** $x\in\{-4; 3\}$; **d)** $x\in\{-1; 0; 1\}$; **e)** $x = 3$. **4.** $x = 2, y = 8, z = 16, t = 4$.

Test 24. 1. $A\cap B = A\cap C = B\cap C = A\cap B\cap C = \varnothing$; $A\cup B\cup C\cup D = \mathbb{Z}$; $A\setminus B = A$; $C\setminus B = C$. **2.** $(x, y)\in\{(-2; -3), (2; -3)\}$. **3.** $A\cup B = \{-1; 2; -3; 4; 5\}$; $A\cap C = \{-3\}$; $A\times B = \{(-3; -1); (-3; 2); (4; -1); (4\ 2); (5; -1); (5; 2)\}$. $B\times A = \{(-1; -3); (-1; 4); (-1; 5); (2; -3); (2; 4); (2; 5)\}$. $A\setminus B = \{-3; 4; 5\}$; $(A\setminus B)\cap(A\cup C) = \{-3; 4; 5\}$. **4.** $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{3; 9\}$; $C = \{-7; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 5\}$; $D = \{-4; -2; 0; 2\}$; $E = \{(0; 4); (3; 2)\}$; $F = \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\}$.

Test 25*. 1. d; **2.** b; **3.** b; **4.** a; **5.** c; **6.** d; **7.** d; **8.** c; **9.** c; **10.** $A = \{-3; 1; 3; 7\}$; **11.** $a < b < c$; **12.** $a = 100\cdot x$; $b = 1300$; $x = -13$.

Test 26. 1. a) $A=\left\{-15; -7{,}5; -2\frac{3}{8}; -\frac{7}{6}; 0; 0{,}(17); (-5)^0; 1\frac{1}{2}; 2; 5{,}6\right\}$; **b)** $A\cap\mathbb{N}=\{0; (-5)^0; 2\}$; $A\cap\mathbb{Z}=\{-15; 0; (-5)^0; 2\}$; $A\cap\mathbb{Q} = A$. $A\setminus\mathbb{Z}=\left\{-7{,}5; -2\frac{3}{8}; -\frac{7}{6}; 0{,}(17); 1\frac{1}{2}; 5{,}6\right\}$; $A\setminus\mathbb{Q}_+ = \left\{-15; -7{,}5; -2\frac{3}{8}; -\frac{7}{6}\right\}$; $A\setminus\mathbb{Q}_- = A\setminus\{-15\}$. **2. a)** $\frac{7}{12}$; **b)** $\frac{11}{5}$; **c)** $-\frac{20}{7}$; **d)** $\frac{7}{2}$ şi $\frac{5}{2}$; **e)** $-\frac{2}{3}$ şi $\frac{2}{3}$; **f)** $\frac{5}{9}$ şi $\frac{7}{9}$. **3. a)** $-\frac{13}{12}$; **b)** $\frac{13}{8}$; **c)** $3\frac{25}{39}$; **d)** 3; **e)** 0; **f)** 1. **4. a)** -1; **b)** $\frac{1}{5}$, dacă n este par şi $-\frac{1}{5}$, dacă n este impar; **c)** $\frac{1}{n+1}$.

Test 27. 1. a) $-\frac{11}{18}$; **b)** $\frac{1}{15}$; **c)** $-\frac{1}{6}$; **d)** $\frac{4}{7}$; **e)** $\frac{1}{22}$; **f)** -1; **g)** $\frac{76}{121}$; **h)** $\frac{3}{5}$. **2. a)** $-12{,}5$; **b)** $-33{,}3$; **c)** 35,912; **d)** 0,5; **e)** $\frac{5}{8}$; **f)** $-\frac{8}{27}$; **g)** $\frac{729}{15625}$; **h)** $\frac{1}{4}$; **i)** 1. **3. a)** $\frac{8}{3}$; **b)** $\frac{8}{5}$; **c)** 2; **d)** 2; **e)** $\frac{16}{5}$; **f)** 4; **g)** $\frac{6}{5}$; **h)** -2 şi $\frac{8}{3}$; **i)** $-1{,}96$ şi 1,96.

Test 28. 1. a) $m_a = 10$; **b)** 4,58; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** 0,59(34); **e)** 2,0125. **2.** $(170 \cdot 4 - 80) : 3 = 200$. **3.** $\frac{a+b}{2} = 144 : 24 = 6$, **4.** $8 + 9 + 12 + x = 104$, de unde $x = 11$; **5. a)** sâmbătă; **b)** $(23 + 14 + 12 + 18 + 25 + 28 + 27) : 7 = 21°$.

Test 29. 1. a) Înlocuind x și y cu a și b în inegalitatea $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, se obține $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, adică $\sqrt{ab} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde rezultă $a \cdot b \le \frac{3}{4}, (a,b>0)$. Analog **b)**. **c)** $a + b \ge 2\sqrt{ab}$; $a + c \ge 2\sqrt{ac}$ și $b + c \ge 2\sqrt{bc}$ etc. **2.a)** $m_a = 50$; $m_g = 3\sqrt{11}$; **b)** $m_g = \frac{\sqrt{11}}{3}$; **c)** $m_a - \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}}{2}$; $m_g - 1$; **d)** $m_a = 2\sqrt{5}$; $m_g = 1$. **3.** $x = 9$. **4.** 24 km/h. **5.** 6,80 lei/kg.

Test 30. 1. a) $A = \left\{-\sqrt{16}; -\frac{5}{2}; -\sqrt{5}; -\sqrt{2,25}; \sqrt{0}; \sqrt{0,09}; 1; \sqrt{2}; \sqrt{9}; \pi\right\}$. **b)** $A \cap \mathbb{N} = \left\{\sqrt{0}; 1; \sqrt{9}\right\}$; $A \cap \mathbb{Z} = \left\{-\sqrt{16}; \sqrt{0}; 1; \sqrt{9}\right\}$; $A \setminus \mathbb{Q} = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{2}; \pi\right\}$; $A \cap \mathbb{Q} = \left\{-\sqrt{16}; -\frac{5}{2}; -\sqrt{2,25}; \sqrt{0}; \sqrt{0,09}; 1; \sqrt{9}\right\}$.

2. a) 5; 2; 51. **b)** 2,5; 1,03. **c)** −0,1; **d)** $-\sqrt{3}$; **e)** 5. **3. a)** 1,41 și 2,23; **b)** 1,5 și 2,3; **c)** 1,4 și 2,2. **4.** $m_a = 15$, $m_g = 12$. **5.** $[3,14] = 3$; $\{3,14\} = 0,14$; $[0,034] = 0$; $\{0,034\} = 0,034$; $[-3,14] = -4$; $\{-3,14\} = 1 - 0,14 = 0,86$; $[-5,324] = -6$; $\{-5,324\} = 1 - 0,324 = 0,676$;.

Test 31. 1. Cazuri favorabile = 8; cazuri posibile = 80. $P(A) = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}$. **2.** $a = 12$; $b = 16$; $c = 20$. **3. a)** 35; **b)** 103; **c)** 1,5; **d)** 7,2; **e)** 0,65; **f)** 1,1(6); **g)** 0,123; **h)** $-\sqrt{2}$; **i)** $-9\sqrt{3}$. **4. b)** Demonstrați prin reducere la absurd. **c)** Avem: $400 \le \overline{4ab} \le 499 \Rightarrow$ $\Rightarrow 20 \le \sqrt{\overline{4ab}} \le 22 \Rightarrow \overline{4ab} \in \{20^2, 21^2, 22^2\}$, dar $a \ne b$, deci $\overline{4ab} \in \{21^2, 22^2\}$.

Test 32. 1. a) $5x$; **b)** $12\,ab$; **c)** $5x^2y$; **d)** $-x^2$; **e)** $x - x^2$; **f)** $x^2 - x$; **g)** x^3; **h)** $3x^3 + 11x^2 - x - 8$; **i)** $8xy^2 + 2x^2y$; **j)** $-3x^2 + x + 1$; **k)** $4x^2 - 5x + 1$; **l)** $-3x^2 + 17x - 16$; **m)** $12x - 16$; **n)** $15x - 21$. **2. a)** $2x^2 - 8x$; **b)** $x^2 + x$; **c)** $2x^4 - 8x^2 + 8x$; **d)** $3x^5 - 3x^3 + 12x^2$; **e)** $-2x^2 - \frac{x}{6} - 6$; **f)** $-k^3 - k^2 - k$; **g)** $x^2 + 4x + 3$; **h)** $2x^5 - x^3 + 8x^2 - 4$; **i)** $x^4 - 1$; **j)** $2x^2y - 2xy^2 + 3x$; **k)** $x^4 - 1$; **l)** $y^3 - 1$. **3. a)** x^2; **b)** $-2x^2$; **c)** $-4x^2$; **d)** $5xy^2z^2$; **e)** $-\sqrt{3}xz^2$; **f)** $-x^2 + 3x$; **g)** $x - 2$; **h)** $-8x^4 + 4x^2 - 2$; **i)** $-x + 4x^2$; **j)** $-3x^2 + 6x$; **k)** $4x^3 + 2x + x^3y^2$; **l)** $5xy - \sqrt{2}y^2 + 3xy^2 - \sqrt{3}x^2$; **m)** $\frac{1}{x^4}$; **n)** x^{-4}; **o)** 1.

Test 33. 1. a) $x^2 + 2x + 1$; **b)** $x^2 + 4x + 4$; **c)** $x^2 + 6x + 9$; **d)** $x^2 + 14x + 49$; **e)** $x^2 + 10x + 25$; **f)** $4x^2 + 4x + 1$; **g)** $9x^2 + 12x + 4$; **h)** $25x^2 + 70x + 49$; **i)** $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3$; **j)** $12x^2 + 4\sqrt{3}x + 1$; **k)** $45x^2 + 12\sqrt{5}x + 4$; **l)** $3 + 2\sqrt{2}$; **m)** $5 + 2\sqrt{6}$; **n)** $14 + 6\sqrt{5}$; **o)** $13 + 4\sqrt{3}$; **p)** $30 + 12\sqrt{6}$; **q)** $38 + 12\sqrt{10}$; **r)** $137 + 20\sqrt{15}$; **s)** $324 + 120\sqrt{2}$; **ş)** $4x^2 + 12xy + 9y^2$; **t)** $9x^4 + 12x^2y + 4y^2$; **ţ)** $16x^2 + 8\sqrt{3}x + 3$. **2. a)** $x^2 - 6x + 9$; **b)** $x^2 - 10x + 25$; **c)** $x^2 - 2x + 1$; **d)** $x^2 - 20x + 100$; **e)** $x^2 - 22x + 121$; **f)** $4x^2 - 12x + 9$; **g)** $9x^2 - 30x + 25$; **h)** $25x^2 - 30x + 9$; **i)** $49x^2 - 56x + 16$; **j)** $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$; **k)** $2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4$; **l)** $12x^2 - 4\sqrt{3}x + 1$; **m)** $27x^2 - 12\sqrt{6}x + 8$; **n)** $3 - 2\sqrt{2}$;

o) $7-4\sqrt{3}$; **p)** $9-4\sqrt{2}$; **q)** $14-4\sqrt{6}$; **r)** $152-30\sqrt{15}$; **s)** $105-60\sqrt{3}$; **ş)** $9x^2-12xy+4y^2$; **t)** $4x^2-20xy+25y^2$; **ţ)** $4x^2-4\sqrt{5}x+5$. **3. a)** x^2-1; **b)** x^2-4; **c)** x^2-9; **d)** x^2-16; **e)** $4x^2-1$; **f)** $25x^2-9$; **g)** $9x^2-16$; **h)** $25-x^2$; **i)** $1-4x^2$; **j)** $1-49x^2$; **k)** $1-x^2$; **l)** $9-9x^2$; **m)** $8x^2-1$; **n)** 23; **o)** 148; **p)** 6; **q)** $9x^2-4y^2$; **r)** $25x^2-16y^2$; **s)** $x^{16}-1$. **4. a)** $2x^2+2$; **b)** $7x^2-8x+11$; **c)** $7x^2+18x-1$; **d)** $x^2+16x+3$; **e)** $32+8\sqrt{2}$; **f)** $4x^2-2xy-y^2$; **g)** $3x^2+y^2$; **h)** x^8-x^4. **5. a)** 39; **b)** $\pm\sqrt{33}$; $\pm\sqrt{17}$; **c)** -10; $\pm 2\sqrt{26}$; **d)** 58 şi 21. **6.** Partea haşurată are aria egală cu a^2+b^2 iar partea nehaşurată are aria egală cu $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$. Dar $2ab\le a^2+b^2$ pentru că $a^2+b^2-2ab\ge 0$ sau $(a-b)^2\ge 0$, oricare ar fi $a,\ b\in\mathbb{R}$. **b)** Da. Dacă $a=b$.

Test 34. 1. a) $2(x-2)$; **b)** $5(5x-1)$; **c)** $3(x-3)$; **d)** $x(x-2)$; **e)** $x^2(3x-1)$; **f)** $4x(x-4)$; **g)** $3x^2(x-3)$; **h)** $3x(3x-y)$; **i)** $4x^3y^3(4x^2y-1)$; **j)** $2\sqrt{3}x^2(x-2)$; **k)** $\sqrt{2}x^3y^2(5+4x)$; **l)** $\sqrt{5}x^5(6x^2+3+5x)$; **m)** $(x-2)(2x-5)$; **n)** $(2x-5)(20-3x)$; **o)** $(2x+5)(5x-3)$. **2. a)** $(x+1)^2$; **b)** $(x+2)^2$; **c)** $(x+3)^2$; **d)** $(2x+1)^2$; **e)** $(3x+1)^2$; **f)** $(3x+2)^2$; **g)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; **h)** $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)^2$; **i)** $(x+y)^2$; **j)** $(2x+y)^2$; **k)** $(x^2+1)^2$; **l)** $(2x+3y)^2$; **m)** $\left(x+\sqrt{2}\right)^2$; **n)** $\left(\sqrt{3}x+1\right)^2$; **o)** $\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)^2$; **p)** $\left(\sqrt{5}x+\sqrt{2}\right)^2$. **3. a)** $(x-3)^2$; **b)** $(x-2)^2$; **c)** $(x-5)^2$; **d)** $(2x-1)^2$; **e)** $(3x-1)^2$; **f)** $(5x-1)^2$; **g)** $(x-2y)^2$; **h)** $(5z-2y)^2$; **i)** $\left(\sqrt{7}y-1\right)^2$; **j)** $(y^2-2)^2$; **k)** $\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2$; **l)** $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y\right)^2$; **m)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{3}}z\right)^2$. **4. a)** $(x-2)(x+2)$; **b)** $(x-3)(x+3)$; **c)** $(x-7)(x+7)$; **d)** $(x-11)(x+11)$; **e)** $(2x-1)(2x+1)$; **f)** $(5y-1)(5y+1)$; **g)** $(7y-5z)(7y+5z)$; **h)** $(11xy-3z)(11xy+3z)$; **i)** $\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(\sqrt{2}x+1\right)$; **j)** $\left(\sqrt{5}x-\sqrt{3}y\right)\left(\sqrt{5}x+\sqrt{3}y\right)$; **k)** $\left(\sqrt{7}xy-2z\right)\left(\sqrt{7}xy+2z\right)$; **l)** $(x-y)(x+y)\cdot(x^2+y^2)$; **m)** $\left(2x-\sqrt{5}y\right)\left(2x+\sqrt{5}y\right)\cdot$ $\cdot(4x^2+5y^2)(16x^4+25y^4)$; **n)** $(y-z)(y+z)(y^2+z^2)(y^4+z^4)\cdot(y^8+z^8)$; **o)** $\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}y\right)\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y\right)$; **p)** $\left(\sqrt{3}x-\frac{1}{4}\right)\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\right)$; **q)** $\left(2\sqrt{2}y-\frac{1}{11}\right)\left(2\sqrt{2}y+\frac{1}{11}\right)$.

5. Trebuie să determinăm lungimea x a grădinii lui Popescu. Avem $x^2-y^2=3200$ sau $(x-y)(x+y)=3200$. Cum $x-y=40$ m rezultă $x+y=80$ m şi $x=60$ m iar $y=20$ m. Perimetrul terenului rămas $=60\cdot 4=240$ m. **b)** $y^2=20^2=400$ m^2.

Test 35. 1. a) $(a+b)(x+y)$; **b)** $(x^2+y^2)(a+b)$; **c)** $(x-a)(y-b)$; **d)** $(y+1)(y^2+3)$; **e)** $(z+1)(z^2+4)$; **f)** $(z-1)(y-4)(y+4)$; **g)** $y(a-b)(y+1)$; **h)** $x(x+y)(a+b)$. **2. a)** $x(x+2)^2$; **b)** $x(x+3)^2$; **c)** $y(y+8z)^2$; **d)** $z^2(x-5)^2$; **e)** $2x(x-7)^2$; **f)** $\sqrt{2}x\left(2x^2-2\sqrt{2}x+1\right)=\sqrt{2}x\left(\sqrt{2}x-1\right)^2$; **g)** $x(x-y)(x+y)$; **h)** $2x(x-2)(x+2)(x^2+4)$; **i)** $3x^2(x-3)(x+3)(x^2+9)$; **j)** $x(x+2)$; **k)** $4x(x+3)$; **l)** $4\left(y-2\sqrt{3}\right)\left(y+\sqrt{3}\right)$; **m)** $12y(y-z)$; **n)** $(6x+7)(2x-1)$; **o)** $(x^2+z+1)(x^2-z+1)$; **p)** $(x+y)^2-(z+1)^2=(x+y+z+1)(x+y-z-1)$; **q)** $(x^2-x-3)(x^2+x+3)$; **r)** $(x+1)^4$; **s)** $(x-1)^2(x^2+2x-1)$. **3. a)** $(x+1)(x+4)$; **b)** $(x+1)(x+5)$; **c)** $(x+3)(x+2)$; **d)** $(y+4)(y+5)$; **e)** $(x-1)(x-2)$; **f)** $(z-1)(z-4)$; **g)** $(y-2)(y-7)$.

Test 36. 1. a) $-10x+y+1$; **b)** $2x^2-8x+4$; **c)** $12x+1$; **d)** $6x^3-15x^2$; **e)** $2x^3-9x^2+13x-6$; **f)** $-8x^2+5x-3$; **g)** $\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{5}{2}x+3$. **2. a)** $10x^2+64xy-76y^2$; **b)** $14x^2-2x-13$; **c)** $9a^2-4b^2-c^2+4bc$. **3. a)** $13x^2(x-1)(x-2)$; **b)** $(2x-1)(5x-1)^2$; **c)** $(2x-y^2)(2x+y^2)$; **d)** $4(x-1)(x+4)$;

e) $\left(\frac{1}{3}+x\right)^2$; **f)** $(x+1)^2\cdot(5x-1)(5x+1)$; **g)** $\left(3x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(9x^2+\frac{1}{4}\right)$; **h)** $3x(x-1)(x+3)$; **i)** $5x^2(x-1)(2x-1)$; **j)** $(y-1)(y+1)(y^2+1)$; **k)** $(x+1)^2\cdot(x^2-2x-1)$.

Test 37. 1. a) şi **b)**. **2.** Numărul 3 este soluţie pentru ecuaţiile **a)** şi **b)**. **3.** Exemple: $3x+2x=$ $=3+2$ sau $2\cdot(3x-2)=6-4x$ etc. **4. a)** 0; **b)** 0; **c)** $\sqrt{2}$; **d)** $\frac{12}{11}$; **e)** $\frac{25}{24}$; **f)** $-\frac{1}{3}$; **g)** $\frac{1}{10}$; **h)** ϕ; **i)** 0; **j)** 5; **k)** $26\frac{1}{2}$; **l)** $x\in\mathbb{R}$; **m)** $-2\frac{9}{10}$.

Test 38. 1. a) $\frac{17}{21}$; **b)** $-\frac{131}{110}$; **c)** $-\frac{9}{26}$; **2. a)** 2; **b)** $\frac{-6\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{13}$; **c)** $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3}{6}$; **d)** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$. **3. a)** {–5; 5}; {1;5}; {2;3}; **b)**{0; 2; 4}; {–2; 4; 6; 12}; {0; 3}; {–4; 4}. **4. a)** ϕ; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** ϕ; **d)** $\left\{-\frac{2}{3};4\right\}$.

Test 39. 1. Numerele sunt 7 şi 9. **2.** 12 şi 156. **3.** $1\frac{1}{3}$ **4.** 32; 68. **5.** 15 apartamente cu 2 camere şi 10 apartamente cu 3 camere. **6.** 175; 195.

Test 40. 1. $B=\left\{5;\sqrt{4}\right\}$; $C=\left\{5;-5;\sqrt{4}\right\}$; $D=\left\{5;-5;\frac{4}{3};-\frac{1}{2};1,(3);0,1(2);-1,3;\sqrt{2\frac{1}{4}};\sqrt{4}\right\}$; $E=\left\{\sqrt{3},\sqrt{3}-\sqrt{2}\right\}$; $F=\{-5\}$. **2. b)** $\sqrt{3}=\sqrt{2+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}\Rightarrow\sqrt{3}$ este diagonala unui dreptunghi cu laturi $\sqrt{2}$ şi 1; $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}\Rightarrow\sqrt{2}$ este diagonala unui pătrat cu latura de 1; $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}\Rightarrow\sqrt{5}$ este diagonala unui dreptunghi cu laturi de 2 şi 1.

3. a) $2\sqrt{5}<7\sqrt{2}$; **b)** $\frac{1}{3}>\frac{1}{5}$; **c)** $3^{-4}=81^{-1}$; **d)** $1-\sqrt{2}<2-\sqrt{3}$; **e)** $\sqrt{39}>6{,}241$; **f)** $9>4\sqrt{5}$; **g)** $15{,}46>\sqrt{239}$. **4. a)** 8,4; **c)** –4,2. **5. a)** 1; **b)** 1; **c)** $2\sqrt{3}+3$; **d)** $3x-3$.

Test 41. 1. a) $1988000\le\overline{1988abc}\le1988999\Rightarrow\sqrt{1988000}\le\sqrt{\overline{1988abc}}\le\sqrt{1988999}\Rightarrow$ $\Rightarrow1409<\sqrt{\overline{1988abc}}\le1410$. Deci, $\overline{1988abc}=1410^2=1988100$ **b)** Numerele $1995n+1997$ şi $1995n+1998$ nu sunt pătrate perfecte pentru nici o valoare naturală a lui n. Se determină ultima cifră. **2. a)** F; **b)** A; **c)** A; **d)** A; **e)** F; **f)** A; **3. a)** {–3;0}; **b)** {–3,14; –3; 0; 0,75}; **c)** $\left\{\sqrt{5};\frac{\sqrt{8}}{9};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; **d)** M. **4.** –3,(2); $-3{,}2(1);-\sqrt{10};-\pi;-3{,}14$. **5. a)** 2. **b)** 1,234; 1,235; 1,236 etc. **6. a)** 0; **b)** $\sqrt{2}$; **c)** 9; **d)** $2x+4$; **e)** 0. **7. a)** $x\in\left\{\frac{1}{3};1\right\}$; **b)** $x\in\left\{-\frac{7}{3};1\right\}$; **c)** $x\in\{-1;3\}$.

Test 42. 1. $A=[-2;5]$; $B=(-1;3)$; $C=(-1;2]$; $D=(-\infty,-1]$; $E=(5,+\infty)$. **2.** $A=(-\infty;-1]$; $B=(4,+\infty)$; $C=(-\infty;-1]$; $D=[\sqrt{2};+\infty)$; $E=(-\infty;1]$; $F=[3;+\infty)$. **3. a)** A. **b)** F. **c)** F. **d)** F. **e)** A. **f)** A. **g)** A. **h)** A.

Test 43. **1.** **a)** -4; **b)** $1+2\sqrt{2}$; **c)** $\sqrt{5}$; **d)** $\sqrt{3}$; **e)** $-495\sqrt{2}$; **f)** $-4\sqrt{5}$; **g)** $-119\sqrt{3}$; **h)** 0. **2.** **a)** $640\sqrt{3}-192\sqrt{2}$; **b)** $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **c)** $\sqrt{3}$; **d)** $12-8\sqrt{3}$. **3.** Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că $a+b\in\mathbb{Q}$. În acest caz ar exista $r\in\mathbb{Q}$ astfel încât $a+b=r$, de unde $b=r-a\in\mathbb{Q}$, contradicție. De asemenea, dacă $a\cdot b\in\mathbb{Q}$, atunci există $p\in\mathbb{Q}$, astfel încât $a\cdot b=p$, de unde $b=\frac{p}{a}\in\mathbb{Q}$, contradicție. Deci $a+b$, $a\cdot b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **4.** Particularizăm în **3.**

Test 44. **1.** **a)** 3; **b)** 18; **c)** $\frac{12}{25}$; **d)** $\frac{1}{9}$; **e)** $\frac{25}{16}$; **f)** 8; **g)** 75; **h)** 9; **i)** $4\sqrt{10}$; **j)** 0. **2.** $a=b=6\sqrt{3}$. **3.** **a)** $\frac{7\sqrt{3}}{18}$; **b)** $\frac{5\sqrt{2}}{24}$; **c)** $\frac{1}{36}$. **4.** **a)** $m_a=3$, $m_g=1$; **b)** $m_a=\sqrt{3}$; $m_g=\sqrt{2}$.

Test 45. **1.** **a)** $3x^3-3x^2-x+1$; **b)** $2a^5-1{,}5a^3-1{,}1a^2+0{,}5$; **c)** $-x^2y-\frac{1}{2}xy^2-\frac{3}{10}x$; **d)** $-2a^4$; **e)** $7a$. **2.** **a)** $2x+2y-2$; **b)** $4x+2y-4$; **c)** $-8x-5y-1$; **d)** $3x+2y+1$; **e)** $5x+3y+10$; **f)** $-5x-3y-16$; **g)** $7x+5y+14$. **3.** **a)** $\left(\sqrt{2}x-1\right)^2=2x^2-2\sqrt{2}x+1$; $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2=13-4\sqrt{10}$; $(-x-1)^2=x^2+2x+1$. **b)** $(5-2x)(2x+5)=25-4x^2$; $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)=-6$; $(x+y+1)\cdot(x-y+1)=x^2-y^2+2x+1$. **c)** $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)=8x^3+27y^3$ etc. **4.** **a)** $5x+12y+1$; **b)** $-2x^2-5x-y-2$; **c)** $5x^2-8x-12$; **d)** $3x^3-9x^2+x+1$; **e)** $-17x^2+22x+23$; **f)** $3x^2+2$; **g)** $2x^4+3x^3-3x^2-3x+2$.

Test 46. **1.** $x+y=-3\Rightarrow x^2+2xy+y^2=9\overset{(xy=2)}{\Rightarrow}x^2+y^2=5\overset{(xy=2)}{\Rightarrow}x^2-2xy+y^2=1\Rightarrow$ $\Rightarrow(x-y)^2=1$ ş.a.m.d. **2.** $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\frac{1}{a^2}=7+2=9$, de unde $a+\frac{1}{a}\in\{-3;3\}$. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\frac{1}{a^2}=7-2=5$, de unde $a-\frac{1}{a}\in\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$. $a^4-\frac{1}{a^4}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$. Se obține: $a^4-\frac{1}{a^4}\in\{-21\sqrt{5};21\sqrt{5}\}$. **3.** Expresia a cărei valoare se cere se poate scrie: $(x^2+2y-3)^2$ etc.

4. Observați în fiecare caz membrul 1 și completați pentru a obține pătratul unui binom. **a)** $x^2-4x+4=5+4\Rightarrow(x-2)^2=9$. **b)** $(x+2)^2=4+5$; **c)** $(x^2+1)^2=1+24$, **d)** $(y^2-3)^2=100$ etc.

Test 47. **1.** **a)** $x(4x-1)(4x+1)$; **b)** $(x-3)(x+3)(x^2+9)$; **c)** $(\sqrt{7}x-1)(\sqrt{7}x+1)$; **d)** $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$; **e)** $(x-1)(x+3)(x^2-2x+3)$; **f)** $(-2x+3)\cdot(4x+3)$; **g)** $4(2x+y)(x+3y)$; **h)** $(x+y+z)(z-x-y)$; **i)** $(x-y+a-b)(x-y-a+b)$; **j)** $(x+y+a+b)\cdot(x+a-y-b)$. **2.** **a)** $(x-3)(x+5)$; **b)** $(x+2)(x-3)$; **c)** $(x-1)(x+11)$; **d)** $(x-1)(x-9)$; **e)** $(x-3)(x+4)$; **f)** $(2x-1)(x+3)$; **g)** $(4x-1)(3x+2)$; **h)** $(7x-1)(2x+1)$; **i)** $(x-2)(x+10)$; **j)** $(x-1)(x-2)(x+3)$; **k)** $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$. **3.** **a)** $(x+1)(x-3)(x+3)$; **b)** $(x-1)(x-3)(x+3)$; **c)** $(x-1)^2(x+1)$; **d)** $(x-1)(3x-1)(x+1)$; **e)** $(x-2)(x+1)(x+2)$; **f)** $(x-3)(x+3)^2$; **g)** $(x-2)(x-1)(x^2-x+1)$; **h)** $(x-3)\cdot(x+2)(x^2+1)$; **i)** $(x+2)(x^2+2)$; **j)** $(x-5)(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})$; **k)** $(x-1)(x-3)(x-4)$; **l)** $(x-3)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$; **m)** $(x+5)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$. **4.** **a)** $3(2x+1)$; **b)** $2x(1-2x)$; **c)** $(x+2)(x-3)$; **d)** $(x-2)(2x+3)$; **e)** $(x-8)(x+8)$; **f)** $4(x-2)(x+2)$; **g)** $-(4x-1)(2x+1)$; **h)** $(2x-3)(4x-1)$; **i)** $(3-x)(3x-1)$; **j)** $2x(x-1)^2$; **k)** $(x+y-2)(x-y-2)$; **l)** $(x+3)(x-4)$; **m)** $(x-1)(x+1)\cdot(x^2+1)(x^4+1)$; **n)** $(x^2-x+1)^2$; **o)** $(x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$; **p)** $(x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$.

Test 48. 2. Fracțiile se amplifică, în ordine, cu: a) 6x, 2x, 3; b) $x-1; x+1; 1$; c) $x-3; x+3; 1$; d) $x-2; x-3; 1$. 3. a) $\frac{1}{3x}$; b) $\frac{a}{5}$; c) $\frac{1}{5x^6}$; d) $\frac{x}{3a}$; e) $\frac{2y}{5x}$. 4. a) $\frac{x-1}{x+2}$; b) $\frac{x+1}{(x+2)^2}$; c) $\frac{x-5}{x+5}$; d) $\frac{x+1}{x-1}$; e) $\frac{x-2}{x+2}$; f) $\frac{2}{x+1}$; g) $\frac{x-11}{2}$; h) $\frac{5}{x+13}$. 5.a) $\frac{x}{2}$; b) $\frac{x^2-x}{5}$; c) $\frac{2x-2}{x+1}$; d) $\frac{x-5}{x+5}$; e) $\frac{x-2}{x+2}$; f) $\frac{x-3}{x+3}$; g) $\frac{x+1}{x+2}$; h) $\frac{x+1}{x+3}$; i) $\frac{5}{x+7}$; j) $\frac{x+3}{x+4}$; k) $\frac{x+1}{x+3}$; l) $\frac{2x+1}{x-1}$.

Test 49. 3. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2x}{x+3}$; c) $\frac{x-3}{x+3}$; d) $\frac{x-1}{x+2}$; e) $\frac{x+2}{x-3}$; f) $\frac{1}{x^3+y^3}$; g) $\frac{x-3}{x-4}$; h) $\frac{x^2-4}{5x^2+7}$; i) $\frac{x-1}{x-2}$; j) $\frac{x-1}{x+2}$; k) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x+4}$. 4. a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x+5}{x-5}$; c) $\frac{x+3}{x+5}$; d) $\frac{2x-3}{5x+1}$; e) $\frac{x+5}{x-3}$; f) $\frac{x+3}{x+2}$; g) $\frac{4x-1}{4x+1}$; h) $\frac{x-1}{x+1}$; i) $\frac{3x-1}{3x+1}$; j) $\frac{1}{a+b}$; k) $\frac{x-3}{x+3}$; l) $\frac{x-2y-z}{-x+2y-z}$; m) $\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2}$; n) $\frac{x^2-x+6}{x^2-x+3}$; o) $\frac{x+1}{x-1}$ p) $\frac{x-1}{x^2-x+1}$.

Test 50. 1. a) $\frac{2x}{x^2+1}$; b) $\frac{x^2}{x+1}$; c) $\frac{x+y+3xy}{xy(x+y)}$; d) $\frac{1}{x+1}$; e) $\frac{3-2x}{x^2-1}$; f) $\frac{12x-19}{5x(x-2)}$. 2. a) 3; b) $\frac{2x^2+4x+3}{(x-3)(x-1)(x+2)}$. 3.a) $\frac{9x-3}{4}$; b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; c) $\frac{-5x-2}{x^3+8}$; d) 0; e) $\frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2}$. 4.a) $\frac{-2x^2-4x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}$; b) $-\frac{2}{3x}$.

Test 51. 1. a) $\frac{1}{x}$; b) $\frac{7x+6}{2x^2}$; c) $-\frac{5}{21x}$; d) $\frac{x^2-x+2}{x^2-1}$; e) $\frac{3x^2+4x-1}{x^2-1}$; f) $\frac{x^2+2x-4}{x^2-4}$. 2. a) $\frac{1}{6x}$; b) $2x-2$; c) $\frac{2x+2}{x^2-x}$; d) $\frac{x}{2x-6}$; e) $\frac{2}{x^2(x+1)}$; f) $\frac{(x+1)(x+5)}{(x-5)(x+2)}$; g) $\frac{x+2}{(x-1)^2}$; h) $\frac{x-1}{x+3}$; i) 1. 3. a) 1; b) 2; c) $\frac{x+3}{x-3}$; d) 4; e) $\frac{1}{x+1}$. 4. a) $\frac{x+3}{x-2}$; b) $\frac{x+4}{4-x}$.

Test 52. 1. a) $\frac{x+3}{x-5}$; b) $\frac{1}{(x+y)^2}$. 2. a) $\frac{x+1}{x+4}$; b) $\frac{1}{2}$. 3. a) 1; b) $\frac{x-2}{x+5}$. 4.a) $\frac{x-5}{x+5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{2x+3}$; d) $\frac{1}{2x}$.

Test 53. 1. a) $f(x)$ este definită pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;-3\}$; b) $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$. c) $f(2)=\frac{3}{5}$; $f(x)$ nu este definită în -1, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{5}$; $f(3)=\frac{5}{6}$. d) $\frac{2x-1}{x+3}=\frac{2(x+3)-7}{x+3}=2-\frac{7}{x+3}$. $f(x)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{7}{x+3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x+3\in D_7\Leftrightarrow x\in\{-2;-4;4;-10\}$. 2. a) $E(x)$ are sens pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2;4\}$; b) $E(x)=\frac{4-x}{2x+2}$; c) $x\in\{0;-2;-6\}$. 3. a) DA. b) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$. c) $x<0\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-x+1>0$ și $x^2-2x+1>0$ și atunci $x^2-x+1<x^2-2x+1$, deci $E(x)<1$. d) $E(x)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1/x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1/x \Leftrightarrow (x-1)^2/x$. Cum $(x-1, x) = 1$, rezultă $(x-1)^2 = 1$, deci $x \in \{0,2\}$. Dar $0 \notin \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, deci $x = 2$. **4. b)** $A = \{4;5\}$; $B = \mathbb{N}^*\setminus\{3;10\}$.

Test 54. 1. Alcătuiți diagramele corespunzătoare. Obțineți 8 funcții **2. b)** și **c). 3.** $f(x) = x - 1$. **4.** $\left\{7;3;2;1;-2\sqrt{2}+3\right\}$. **5. a)** $f(x) = 3$. **b)** $f(x) = -x + 2$. **c)** $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Test 55. 1. $f(0) = -2; f(1) = -1; f(-1) = -3; f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}; f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}-2; f(-\sqrt{3}) =$

$= -\sqrt{3}-2; f(4) = -6; f(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = \sqrt{5}-\sqrt{2}-2$. **2. a)** $f(0) = 1$ și $-x + 1 = 0$ implică $f(1) = 0$. Graficul intersectează graficul funcției în punctele $A(0; 1)$ și $B(1; 0)$ etc. **3.** $A(-1,3) \in G_f \Rightarrow f(-1) = 3$, de unde $m=3$. **4.** Graficul funcției f intersectează axele de coordonate în punctele $A(0,2)$ și $B(4,0)$, iar cel al funcției g în punctele $C(0,-1)$ și $D(1,0)$. Punctul de intersecție a graficelor celor două funcții este $E(2,1)$. Se calculează aria ΔEDB. **5.** $f(x) = 0$. Conduce la ecuația $4x - 3 = x$, de unde $x = 1$. Graficul funcției conține punctul $A(1; 1)$.

Test 56. 1. a) Reprezentarea geometrică a graficului funcției fiind o dreaptă, rezultă că funcția este de tipul $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Cum A și B aparțin graficului funcției, se obține sistemul: $\begin{cases} -a + b = 1 \\ -2a + b = -1 \end{cases}$, echivalent cu $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$, deci $f(x) = 2x + 3$;

b) 1) A. **2)** F. **2.** Se determină funcția f al cărei grafic este MN, apoi se verifică dacă $P \in G_f$. M, N, P sunt coliniare. **3. a)** Se determină intersecțiile dreptei G_f cu axele de coordonate, apoi se determină tangenta unghiului a cărui măsură se cere, în triunghiul ale cărui vârfuri sunt originea sistemului de coordonate și cele două puncte găsite. Se obține $m(\sphericalangle(G_f, Ox)) = 60^\circ$. Analog $m(\sphericalangle(G_g, Oy)) = 30^\circ$. **b)** Utilizând **a)** se obține $m(\sphericalangle(G_f, G_g)) = 60^\circ$. **4.** Presupunem că există un punct $A(c,-c)$, $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $A \in G_f$ Atunci $f(c) = -c$, relație care conduce la $(a-2)c = 1$, egalitate ce poate avea loc pentru orice $a \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$; $c = \frac{1}{a-2}$.

Test 57. 1. -2 este soluție. **2. a)** $x = 3$; **b)** $x = 1$; **c)** $x = \frac{23}{30}$; **d)** $x = 3$; **e)** $x = \frac{11}{12}$; **f)** $x = 8$; **g)** $x = \frac{11}{13}$; **h)** $x = -\frac{3}{5}$; **i)** $x = \frac{25}{6}$; **j)** $x = 26$; **k)** $x = 2$ și $x = -2$; **l)** nu are soluție; **m)** $x = 3$ sau $x = -1$; **n)** nu are soluție; **o)** $x = 2$. **3. a)** 1; **b)** -7; **c)** $-\frac{5}{11}$; **d)** $\frac{11}{25}$; **4. a)** 1; **b)** -4; **c)** $\frac{1-\sqrt{5}}{12}$; **d)** 1; **e)** $\frac{24}{17}$; **f)** 6; **g)** 5; **h)** ϕ.

Test 58. 1. $(-1; 1)$; $(1; 2)$. **3.** $(2; -2)$, $(1; 1)$, $(2; 3)$; $(2; -3)$. **4.** $(1; 1)$; $(1; 5)$; $(4; -4)$.

Test 59. 1. a) $x = 1$; $y = 1$; **b)** $x = 5$, $y = 4$; **c)** $x = 3$, $y = 0$; **d)** $x = 2$; $y = -5$; **e)** $x = \frac{22}{19}$, $y = \frac{23}{19}$; **f)** $x = \frac{416}{35}$, $y = \frac{374}{35}$; **g)** $x = 6$; $y = 9$. **2. a)** $x = 60$, $y = 36$; **b)** $x = 2$, $y = 5$; **c)** $x = -\frac{22}{41}$, $y = -\frac{77}{41}$; **d)** $x = \frac{63}{16}$, $y = \frac{21}{32}$. **3. a)** $x = 3$, $y = 4$; **b)** nu are soluție; **c)** $x = 5$, $y = -2$; **d)** $x = -2 - y$, $y \in \mathbb{R}$; **e)** $x = \frac{23}{8}$, $y = -\frac{1}{23}$; **f)** $x = 4$; $y = 6$. **4. a)** $x = -\frac{295}{102}$, $y = -\frac{509}{102}$; **b)** $x = 23$, $y = -22$; **c)** $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$; **d)** $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$.

Test 60. **1.** Numerele sunt 40 şi 80. **2.** $2x + x + x + 50 = 450$ de unde, $x = 125$ (al doilea număr). **3.** $\frac{3}{10}x + \frac{7}{20}y + 14 = x$ de unde $x = 40$. **4.** Numerele sunt 37 şi 77. **5.** Numerele sunt 1000 şi 600.

Test 61. **1.** Numerele sunt 200 şi 80. **2.** 39 şi 52. **3.** $\frac{4}{36}$. **4.** 40 milioane; 60 milioane. **5.** 20 lei şi 15 lei.

Test 62. **1.a)** $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$; **b)** $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; **c)** $x \in [-2, +\infty)$; **d)** $x \in \left(-\infty, -\frac{17}{11}\right)$; **e)** $x \in (-\infty, 0]$; **f)** $x \in \mathbb{R}$; **g)** $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$; **h)** $x \in \left(\frac{35}{4}, +\infty\right)$. **2.** $A = (1, +\infty)$; $B = \{0; 1\}$; $C = \{...; -2; -1; 1; 2\}$; $D = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$; $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $F = \{-1\}$. **3.** Deoarece lungimile laturilor unui triunghi sunt exprimate prin numere reale pozitive avem inecuaţiile: $2x - 3 > 0$ şi $x - 1 > 0$ care conduc la $x > \frac{3}{2}$. Din **teorema de existenţă** a unui triunghi avem inecuaţiile: $|x - 1 - 8| < 2x - 3$ şi $2x - 3 < (x - 1) + 8$. Inecuaţia $|x - 1 - 8| < 2x - 3$ pentru $x > 9$ nu conduce la soluţie, iar $x \leq 9$ conduce la $x > 4$. A doua inecuaţie are soluţia $x \in \left(\frac{3}{2}; 10\right)$. Cum $x > \frac{3}{2}$ şi $x \in \mathbb{Z}$ triunghiul există pentru $x \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$. **4.** Fie x numărul răspunsurilor corecte. În acest caz numărul răspunsurilor greşite este egal cu $50 - x$. Avem inecuaţia $10x - (50 - x) \cdot 4 > 140$, care are soluţia $x \geq 25$. Prin urmare, elevul trebuie să răspundă corect la cel puţin 25 de întrebări.

GEOMETRIE

Test 63. **1.** **a)** 21,05; **b)** 1,606. **2.** **a)** 250,48; **b)** 280,55; **c)** 323,8. **3.** **a)** 2000,006; **b)** –0,2594; **c)** 137. **4.** **a)** **i)** 2°20'56"; **ii)** 225,6' = 3,76°; **b)** **i)** 133°44'52"; **ii)** 73°40'12" – – 29°53'49" = 72°99'72" – 29°53'49" = 43°46'23"; **iii)** 104°13'.

Test 64. **1.** **a)** 10. **b)** **1)** NU; **2)** DA (dacă exact patru din cele 5 puncte sunt coliniare); **3)** DA (dacă punctele sunt situate astfel încât să existe două triplete de puncte coliniare, având un element comun); **4)** DA. **2.** **a)** Din $AD = AC + BD - BC$, se obţine $AC + BD = 12$ cm; $AB = 6$ cm; **b)** $AD = 8$cm; **c)** $AD = 9$cm. **3.** **a)** **1)** 80°27'15"; **2)** 52°28'; **b)** **1)** 84° şi 96°; **2)** 30° şi 60°; **4.** $m(\sphericalangle YOT) = m(\sphericalangle XOY) - m(\sphericalangle XOT) = 40°$; Analog $m(\sphericalangle XOZ) = 40°$, de unde $m(\sphericalangle ZOT) = 40°$. Fie ($OA$ bisectoarea $\sphericalangle XOY$. Rezultă că $m(\sphericalangle XOA) = 60°$. şi $m(\sphericalangle ZOA) = m(\sphericalangle AOX) - m(\sphericalangle XOZ) = 20° \Rightarrow m(\sphericalangle ZOA) = \frac{m(\sphericalangle ZOT)}{2}$. Deci [$OA$ este şi bisectoarea $\sphericalangle TOZ$.

Test 65. **1.** $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$ (L.U.L.); $\Delta AON \equiv \Delta BOM$ (L.U.L.); $\Delta BMC \equiv \Delta AND$ (L.L.L.) (**fig. 1**). **2.** **a)** $\Delta AA'M \equiv \Delta BB'M$ (L.U.L.); **b)** $\sphericalangle A'MA \equiv \sphericalangle B'MB \Rightarrow m(\sphericalangle A'MB') = 180°$. **3.** **a)** $\Delta OAD \equiv \Delta OCB$ (L.U.L.). **b)** Din **a)** se deduce $\sphericalangle OAI \equiv \sphericalangle OCI$ şi $\sphericalangle ABI \equiv \sphericalangle CDI$; U.L.U. **c)** $\Delta OAI \equiv \Delta OCI$ (L.L.L.) (**fig. 2**). **4.** Se arată că $|EB] \equiv |EC]$ şi rezultă $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle ECB$, apoi $\sphericalangle EBA \equiv \sphericalangle ECD$; $\Delta EBB' \equiv \Delta ECC'$ (L.U.L.) de unde $\sphericalangle B'EB \equiv \sphericalangle C'EC$; $\Delta EBA \equiv \Delta ECD$ (U.L.U.) implică $[AB] \equiv [CD]$ şi urmează imediat că $[BC]$ şi $[AD]$ au acelaşi mijloc. (**fig.3**)

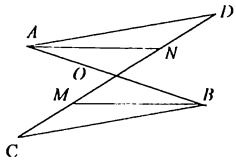


Fig. 1

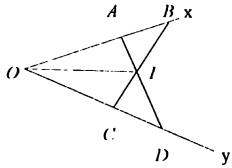


Fig. 2

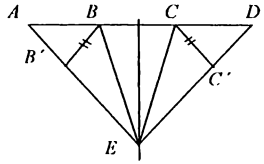
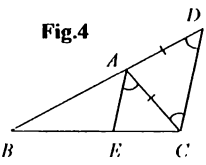


Fig. 3

Test 66. **1.** **a)** 90°; **b)** 180°; **c)** 36°; **d)** 144°; **e)** 153°. **2.** Cazul $D\in(BM)$ şi $D'\in(B'M')$. $\Delta ADM\equiv\Delta A'D'M'$ (C.I.), de unde rezultă că $\sphericalangle AMB\equiv\sphericalangle A'M'B'$. $\Delta ABM\equiv\Delta A'B'M'$ (L.U.L.) $\Rightarrow (AB)\equiv(A'B')$ şi $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle A'B'C'$ etc. Analizaţi şi alte poziţii ale punctelor D şi D' pe dreptele BC şi respectiv $B'C'$. **3.** $(PA)\equiv(PC)$. $\mathcal{P}_{\Delta ABP}=35$ cm. **4.** Punctul P se află pe bisectoarele $\sphericalangle ABN$ şi $\sphericalangle BAM$, fiind egal depărtat de laturile acestor unghiuri etc.

Fig.4



Test 67. **1.** **a)** 60°; **b)** 55°; **c)** 90°. **2.a)** 110°; **b)** $\sphericalangle EAB\equiv\sphericalangle AEF\Rightarrow$ $\Rightarrow AB\parallel EF\Rightarrow\sphericalangle ABD\equiv\sphericalangle DEF$ etc. **3.** 80°, 60°, 40°. **4.** $m(\sphericalangle BIC)=$ $=90^\circ+\frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC)$; $m(\sphericalangle BJC)=90^\circ-\frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC)$. **5.** Fie $(AE$ bisectoarea $\sphericalangle BAC$. $m(\sphericalangle BAC)=m(\sphericalangle ACD)+m(\sphericalangle D)$, deci $m(\sphericalangle EAC)=m(\sphericalangle ACD)\Rightarrow$ $\Rightarrow CD\parallel AE$ (**fig.4**). **6.** Fie $AA'\perp a$, $BB'\perp a$, $A',\ B'\in a$. **a)** $\Delta AMA'\equiv\Delta BMB'$ (I.U.). **b)** $\sphericalangle ABA'\equiv\sphericalangle B'A'B$ (alt. int.); $\Lambda ABA'\equiv\Lambda B'A'B$ (I.U.). **c)** A şi B în semiplane opuse: $(\exists)N\in(AB)\cap a$ şi $\Delta AA'N\equiv\Delta BB'N$ (C.U.). A şi B de aceeaşi parte a dreptei a: $\Delta AA'B\equiv\Delta B'BA'$ (I.C.) $\Rightarrow\sphericalangle ABA'\equiv\sphericalangle B'A'B\Rightarrow AB\parallel a$.

Test 68. **1.** **a)** $m(\sphericalangle B'AM)=45^\circ$; $m(\sphericalangle AMB')=60^\circ$; **b)** $|DC|\equiv|AD|$; $BM=2DM$; $[BM]\equiv[AM]$. Propoziţia este adevărată. **2.** **a)** $m(\sphericalangle NPC)=m(\sphericalangle PAC)+m(\sphericalangle PCA)$ (**teorema unghiului exterior**). Dar $\sphericalangle PAC\equiv\sphericalangle PCN$ (din $\Delta ACN\equiv\Delta CBM$ (L.U.L.)), deci $m(\sphericalangle NPC)=60^\circ$; (**fig. 5**). **3.** **a)** $m(\sphericalangle A)=40^\circ$; $m(\sphericalangle B)=60^\circ$; $m(\sphericalangle C)=80^\circ$; **b)** $5^\circ37'30''$; $84^\circ22'30''$; 90°. **4.** **a)** Se arată că $m(\sphericalangle BAD)$ este o şesime din $m(\sphericalangle BAC)$, $m(\sphericalangle BAD)=90^\circ-m(\sphericalangle B)$. Se exprimă $m(\sphericalangle BAC)$ şi $m(\sphericalangle C)$ în funcţie de $m(\sphericalangle B)$ şi se utilizează teorema privind suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Se obţine $m(\sphericalangle B)=82^\circ$, $m(\sphericalangle C)=50^\circ$, $m(\sphericalangle A)=48^\circ$. **5.** Se arată că $AM\parallel BC$, $AN\parallel BC$ şi se aplică axioma paralelelor. **6.** $AM\parallel BC\Rightarrow\sphericalangle NAB\equiv\sphericalangle ABC\Rightarrow$ $\Rightarrow\Delta NAB\equiv\Delta CBA$ (L.U.L.) $\Rightarrow\sphericalangle NBA\equiv\sphericalangle BAC\Rightarrow NB\parallel AC$.

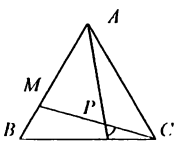


Fig. 5

Test 69. **1.** **d)** Fie ΔABC şi M mijlocul lui $[BC]$. Se consideră $A'\in(AM$ astfel încât $[MA']\equiv[MA]$ şi se obţine succesiv: $\Delta AMB\equiv\Delta A'MC\Rightarrow[A'C]\equiv[AB]$ **(1)** şi $\sphericalangle CA'M\equiv\sphericalangle BAM$ **(2)**; $\Lambda CAA'$ este isoscel cu $[A'C]\equiv[AC]$ **(3)**; $[AB]\equiv[AC]$ (din **(1)** şi **(3)**). **2.** Unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente; metoda triunghiurilor congruente: **a)** L.U.L.; **b)** U.L.U. **3.** **a)** $\Lambda DBC\equiv\Lambda ECB$ (L.U.L.) sau $\Delta ABE\equiv\Delta ACD$ (L.U.L.); **b)** $(AF$ este bisectoarea $\sphericalangle BAC$ etc. Se arată că $\Delta ACD\equiv\Delta ABE$ (C.U.), de unde, $(AE)\equiv AD$, apoi, $\Delta ABD\equiv\Delta ACE$ (L.U.L.). $\Delta ABN\equiv$

$\equiv \Delta ACP$ (L.U.L.), de unde $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ABE$ şi $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle EBC$. $\Delta ABE \equiv \Delta ACD$ (I.U.), de unde $(CD) \equiv (BE)$. $\Delta DBC \equiv \Delta ECB$ (L.U.L.), de unde $(BD) \equiv (CE)$.

Test 70. 1. a) ΔDBC este isoscel; $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$; **b)** $(DA$ este bisectoarea $\sphericalangle BDC$, deci ΔDEF este isoscel. **2. a)** $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle DCB$; $\Delta BDC \equiv \Delta CEB$ (U.L.U.); **b)** $\Delta MBD \equiv \Delta NCE$ (L.U.L.); **c)** $\Delta ABF \equiv \Delta ACF$, deci (AF este bisectoarea unghiului BAC. **3. a)** $\Delta ABD \equiv \Delta ACE$ (U.L.U.); **b)** ΔFBC este isoscel; $\Delta ABF \equiv \Delta ACF$. **4. a)** $\Delta ABP \equiv \Delta ACQ$ (U.L.U.), deci $[BP] \equiv [CQ]$; $\Delta PBC \equiv \Delta QCB$ (L.U.L.); **b)** $\sphericalangle SBC \equiv \sphericalangle SCB$; **c)** utilizând **a)** se obţine $\sphericalangle TBC \equiv \sphericalangle TCB$, deci ΔTCB este isoscel, apoi vezi problema **3.b.**

Test 71. 1. a) $\Delta ADF \equiv \Delta BED \equiv \Delta CFE$ (L.U.L.); **b)** $\Delta ABE \equiv \Delta CAD \equiv \Delta BCF$ (L.U.L.). **2. a)** $\Delta ABM \equiv \Delta BCN \equiv \Delta CAP$ (U.L.U.); deci $[BM] \equiv [CN] \equiv [AP]$ şi urmează $[CM] \equiv [AN] \equiv [BP]$ apoi $\Delta CMN \equiv \Delta ANP \equiv \Delta BPM$ (L.U.L.), de unde rezultă $[MN] \equiv [NP] \equiv [PM]$.**(fig. 6) 3. a)** $\Delta DBA \equiv \Delta ECA$ (L.L.); $\Delta BCD \equiv \Delta CBE$ (L.U.L.); $\Rightarrow [CD] \equiv [BE]$; **b)** $\sphericalangle BDM \equiv \sphericalangle CEN$ (jumătăţi de unghiuri congruente); $\Delta BDM \equiv \Delta CEN$ (U.L.U.). **4.a)** Într-un triunghi echilateral unghiurile sunt congruente, iar înălţimile sunt şi bisectoare, $\Delta ABE \equiv \Delta BCF \equiv \Delta CAD$ (U.L.U.) $\Rightarrow [AE] \equiv [BF] \equiv [CD]$.

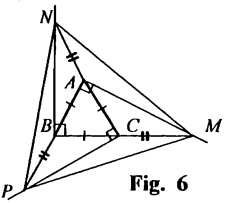


Fig. 6

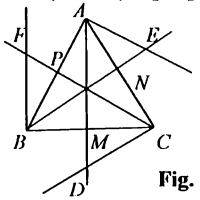


Fig. 7

b) Triunghiurile ΔFAB, ΔEAC, ΔDBC sunt isoscele şi congruente, iar din **a)** se obţine $[AD] \equiv [BE] \equiv [CF]$ şi urmează $\Delta ADF \equiv \Delta BED \equiv \Delta CFE$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [DF] \equiv [DE] \equiv [EF]$ **(fig. 7).**

Test 72. 1. a) $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BAD$ (alt. int.) şi $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$ (ip.);**b)** $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle ADE$ (alt. int.) şi $\sphericalangle CEF \equiv \sphericalangle DAC$ (coresp). **2. a)** $[DI] \equiv [BD]$ şi $[EI] \equiv [CE]$; **b)** $[DI] \equiv [EI] \Leftrightarrow AI \perp DE$. **3.** $\sphericalangle DFE \equiv \sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FED$. **4.** Triunghiurile ΔBNC şi ΔCMB sunt isoscele. **5. 1)** Triunghiurile ΔABE şi ΔACF sunt isoscele; $\Delta EAF \equiv \Delta BAC$ (L.U.L.); **2)** $EF \parallel BC \Leftrightarrow \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC \Leftrightarrow AD \perp BC$. **6. a)** $AE \parallel BC$, $AF \parallel BC$; **b)** AD este mediatoarea segmentului $[EF]$; **c)** FC, EB, PA sunt mediane în ΔPEF; **d)** AD şi BE sunt înălţimi în ΔABC, deci H este ortocentrul acestui triunghi; **e)** $GB = \frac{1}{2}GE, GC = \frac{1}{2}GF, BC = \frac{1}{2}EF$.

Test 73. 1. 1. Fie $BF \parallel AC$, $F \in CE$; $\Delta FBC \equiv \Delta DCB$ (U.L.U.) implică $[BF] \equiv [DC]$; $\Delta ADB \equiv \Delta BFE$ (U.L.U.) implică $[AB] \equiv [BE]$. **2. a)** Fie ΔABC cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $BB' \perp AC$, $CC' \perp AB$, $B' \in AC$, $C' \in AB$. $\Delta BCC' \equiv \Delta CBB'$ (I.U.). **b)** Cu notaţiile de la **a)**, $\Delta BCC' \equiv \Delta CBB'$ (I.C.) **3. a)** $\Delta ADD' \equiv \Delta AEE'$ (I.C.) $\Rightarrow \sphericalangle DAD' \equiv \sphericalangle EAE'$; $\Delta ADB \equiv \Delta AEC$ (U.L.U.). **b)** Fie $F \in DD' \cap EE'$; $\Delta AD'F \equiv \Delta AE'F$ (U.L.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle D'AF \equiv \sphericalangle E'AF$ şi $[AB] \equiv [AC]$; rezultă că AF este mediatoarea lui $[BC]$. **4. a)** $\Delta ABB' \equiv \Delta ACC'$ (L.U.L.); $\Delta AEC' \equiv \Delta ADB'$ (I.U.); **b)** $\Delta ABE \equiv \Delta ACD$ (L.U.L.);

c) Se consideră bisectoarea unghiului BAC şi se arată că ea este perpendiculară pe BC şi DE. **5.** $[ME] \equiv [MB] \Rightarrow \sphericalangle MEB \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ etc. **6.** $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$; AE, MD sunt mediane în triunghiuri isoscele, de unde rezultă că $MD \perp NP$ şi $AE \perp NP$ etc.

Test 74. 1. 66°, 78°, 102°, 114°. **2. a)** BC=5 cm; AB=10 cm. **b)** Se arată că (DM este bisectoarea $\sphericalangle ADC$ şi (CM, bisectoarea $\sphericalangle BCD$ şi se obţine: $m(\sphericalangle MDC) = 70°$, $m(\sphericalangle MCD)=20°$,$(\sphericalangle CMD)=90°$. **3.** $[DN]\equiv[BM]$ şi $DN \| BM$, deci $BMDN$ este paralelogram etc. **4.** Fie O mijlocul lui $[AC]$. ΔOEC este dreptunghic isoscel şi $\Delta OFA \equiv \Delta OEC$ (U.L.U.). $AECF$ este pătrat. **(fig.8) 5.** $DP \| QB$ şi $DF \| BE \Rightarrow DQBP$ este paralelogram $\Rightarrow (DP) \equiv (QB)$ şi, cum $(AD) \equiv (BC) \Rightarrow AP \| QC$ etc.

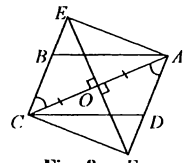


Fig. 8

Test 75. 1. a) paralelogram; **b)** paralelogram; **c)** romb; **d)** dreptunghi; **e)** pătrat; **f)** perpendiculare. **2.** Mediatoarea segmentului (MN) conţine punctul F etc. **3.** Triunghiurile AMI şi API sunt echilaterale etc. **4.** Se arată că rombul are un unghi drept.

Test 76.1. c; **2.** b; **3.** c; **4.** a; **5.** b; **6.** b; **7.** a; **8.** a; **9.** d; **10.** Se foloseşte teorema liniei mijlocii într-un triunghi. **11.** Utilizaţi proprietatea diagonalelor într–un paralelogram. **12. b)** Se arată că patrulaterele $AEBC$ şi $ABCF$ sunt paralelograme, de unde $AE \parallel BC$ şi $AF \parallel BC$, deci E, A, F sunt coliniare. **c)** „$\Rightarrow$“ Arătaţi că într–un triunghi dreptunghic lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătatea din lungimea ipotenuzei. „$\Leftarrow$“ Arătaţi că dacă într–un triunghi o mediană are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic cu unghiul drept în vârful din care pleacă mediana.

Test 77. 1. Construiţi printr-un vârf al trapezului paralela la diagonala trapezului care nu conţine acel vârf. Utilizaţi proprietăţile paralelogramului şi congruenţa triunghiurilor. **2.** 36°, 36°, 144°, 144°. **3.** $m(\sphericalangle B) \equiv m(\sphericalangle C) = 90°$ etc. **4. a)** $DC = BC$ şi $BC = AD$ ($ABCD$ este trapez isoscel) implică $DC = AD$, de unde rezultă: $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DCA$. Cum $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BAC$ (alt. int.), concluzia rezultă imediat. **(Fig. 9) b)** Trapezul $ABCD$ fiind isoscel, avem $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle DAB$. Dacă notăm măsura unghiului $\sphericalangle DCA$ cu x, atunci, utilizând şi **a)**, obţinem $m(\sphericalangle B) = 2x$. Cum $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle BCD) = 180°$, se obţine $2x + 90° + x = 180°$, deci $x = 30°$ etc. **c)** Se aplică teorema unghiului de 30° în ΔABC; $AB = 10$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD} = 25$ cm. **5.** Din $AC = 2BC$ se deduce că $m(\sphericalangle BAC) = 30°$ **(reciproca teoremei unghiului de 30°)**. Rezultă că şi $m(\sphericalangle ACD) = 30°$. **(Fig. 10)** Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Se aplică **teorema unghiului de 30°** în ΔAOB şi în ΔCOD etc.

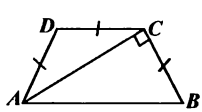


Fig. 9

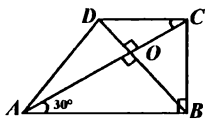


Fig. 10

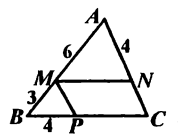


Fig. 11

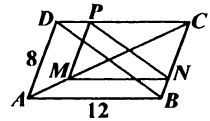


Fig. 12

Test 78. 1. Se aplică **teorema lui Thales**. **(Fig. 11) a)** $MN \parallel BC$ implică $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$, de unde se obține $NC = 2$ cm. **b)** Din $MP \parallel AC$ rezultă $\frac{BP}{BC}=\frac{BM}{AB}$, se obține $BC = 12$ cm. **c)** $MNCP$ este paralelogram, deci $MN = PC = BC - BP = 8$ cm. **2.** Din $\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$ se deduce $\frac{MC}{AC}=\frac{3}{4}$. **a)** Cu **teorema lui Thales** în ΔABC ($MN \parallel AB$) avem: $\frac{NC}{BC}=\frac{MC}{AC}=\frac{3}{4}$ şi cum $BC = 8$ cm, se obține $NC = 6$ cm. Analog, cu **teorema lui Thales** în ΔADC, se obține $PC=\frac{3}{4}DC$ şi cum $DC = AB = 12$ cm, rezultă $PC = 9$ cm. $MNCP$ este paralelogram, deci $\mathcal{P}_{MNCP} = 2(NC + PC) = 30$ cm. **b)** În rezolvarea punctului **a)** am dedus relațiile: $\frac{NC}{BC}=\frac{3}{4}$ şi $\frac{PC}{DC}=\frac{3}{4}$ de unde rezultă $\frac{NC}{BC}=\frac{PC}{DC}$, relație care implică conform reciprocii *teoremei lui Thales* în ΔBCD, paralelismul dreptelor PN şi BD. **(Fig. 12) 3.** $AD = 12$ cm, $AB = 18$ cm, $EC = 8$ cm, $AC = 24$ cm. **4. a) Teorema lui Thales** în triunghiurile ΔABC şi ΔADC conduce la $\frac{BF}{FC}=\frac{DG}{GC}$, apoi se aplică teorema reciprocă a lui Thales în ΔBCD. **b)** $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ iar $\frac{GC}{CD}=\frac{CE}{AC}$ etc. **5.** Cu **teorema lui Thales** în ΔBCE cu $AD \parallel CE$ se obține **(1)** $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}$ **(fig. 13)** Paralelogramul dreptelor AD şi CE implică următoarele congruențe de unghiuri: $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle CAD$ şi $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle DAB$. Cum ($AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, se deduce că $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle AEC$, de unde rezultă **(2)** $AE = AC$. Din **(1)** şi **(2)** rezultă concluzia.

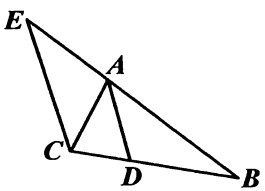


Fig. 13

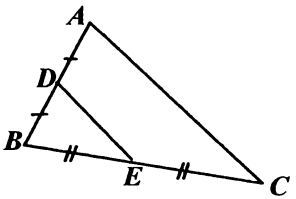


Fig. 14

Test 79. 1. Se aplică **teorema liniei mijlocii în triunghi**. Se obține $DE=\frac{AC}{2}$. **(Fig. 14) a)** $\mathcal{P}_{\Delta BDE} = BD + DE + BE = \frac{AB}{2}+\frac{AC}{2}+\frac{BC}{2}=\frac{\mathcal{P}_{\Delta ABC}}{2}$, $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 36$ cm.

b) Din $\mathcal{P}_{ACED} = 86$ cm, $AC = 30$ cm, $DE = \frac{AC}{2} = 15$ cm se deduce $AD + CE = 41$ cm, adică $\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = 41$ cm, de unde rezultă $AB + BC = 82$ cm. $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = AB + BC + AC =$ $= 82$ cm $+ 30$ cm $= 112$ cm. **c)** $\mathcal{P}_{ACED} = AC + CE + DE + AD = AC + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AB}{2}$. Se obține $AC + \frac{AC}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 12$, de unde se deduce că $AC = 4$ cm și rezultă $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 16$ cm. **2.** Se utilizează **teorema liniei mijlocii. a)** $[MN]$ și $[PQ]$ sunt linii mijlocii în triunghiurile ΔABC și, respectiv, ΔADC ceea ce implică $MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$, $PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{AC}{2}$, de unde, folosind proprietatea de tranzivitate a relației de paralelism, precum și a celei de egalitate, se deduce $MN \parallel PQ$ și $MN = PQ$, condiție suficientă pentru ca $MNPQ$ să fie paralelogram. **b)** În triunghiurile ΔBCD și ΔABD, $[PN]$ și $[QM]$ sunt linii mijlocii, deci avem $PN = \frac{BD}{2} = QM$. Cum $MN = \frac{AC}{2} = PQ$, se deduce că $\mathcal{P}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{P}_{MNPQ}$ 96 cm. **3.** Condițiile: punctul M este mijlocul laturii $[AB]$ și $MN \parallel BC$, $N \in AC$ implică: N este mijlocul lui $[AC]$. Analog, se deduce că punctul P este mijlocul lui $[BC]$. Rezultă că $[MP]$ este linie mijlocie în ΔABC, deci $MP \parallel AC$. **4.** Utilizând proprietăți ale trapezului, se deduce: $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle ADC) = 120°$. Cum ($DB$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$ se deduce că $m(\sphericalangle ADB) =$ $= 60° = m(\sphericalangle BDC)$. Se arată că ΔBDC este echilateral, deci $BC = BD = 8$ cm. Cu teorema unghiului de 30° în ΔABD se obține $AD = 4$ cm. Linia mijlocie $[MN]$ **(fig. 15)** are lungimea egală cu 6 cm. **5.** Se aplică **teoremele liniei mijlocii pentru trapez și triunghi** și se determină $DC = 10$ cm, $AB = 16$ cm, apoi se construiesc înălțimile trapezului. $\mathcal{P}_{ABCD} = 38$ cm.

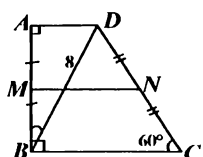


Fig. 15

Test 80. 1.a) 12 cm; **b)** $\frac{3}{11}$; **c)** $\Delta FOA \sim \Delta DCA \Rightarrow \frac{OF}{DC} = \frac{AO}{AC}$; $\Delta BOG \sim \Delta BDC \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{OG}{DC} = \frac{BO}{BD}$, dar $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} \Rightarrow$ (din $\Delta AOB \sim \Delta COD$); $EF = \frac{288}{55}$ cm. **2. a)** Fie $\{N\} = AM \cap EF$. Se folosește **teorema fundamentală a asemănării** în ΔABM cu $EN \parallel BM$ și în ΔACM cu $FN \parallel CM$. **b)** Reducere la absurd. **c)** Prin punctul de intersecție a diagonalelor se construiește paralela la una din baze, apoi se aplică **1.c)** și **2.a). 3.** Fie $MN \cap AC = \{P\}$. Se aplică **teorema fundamentală a asemănării** în ΔABC și în ΔADC. $MN = MP + NP = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$. **4.** $\Delta DEF \sim \Delta CEB$. Dacă

notăm $AB = x$ se obține ecuația $\frac{3}{x} = \frac{x-4}{4}$ echivalentă cu $(x-2)^2 = 16$. $AB = 6$ cm.

$\Delta SRP \sim \Delta QMP$ (u.u.) pentru că $\sphericalangle MPQ \equiv \Delta SPR$, de unde $\frac{SR}{MQ} = \frac{RP}{MP}$ și $\frac{1,60}{MQ} = \frac{1,80}{27}$.

Deci $MQ = \frac{1,60 \cdot 27}{1,80} = 24$ m. **b)** $\frac{1,60}{24} = \frac{RP}{36}$, de unde $RP = \frac{36 \cdot 1,6}{24} = 2,4$ m.

Test 81. 1. Fie $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ și $M \in BC$, $M' \in B'C'$. **a)** Dacă $AM \perp BC$ și $A'M' \perp B'C'$ și $M \neq B$, atunci și $M' \neq B'$ și $\Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$ (u.u.); (dacă $M = B$ atunci $M' = B'$ deci AB și $A'B'$ sunt înălțimi). **b),c)** se procedează asemănător ($\Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$). **2.** Toate propozițiile sunt adevărate: **a)** u.u. **b)** u.u. **c)** Din **b)** se deduce $\frac{HC'}{HB'} = \frac{HB}{HC}$ și rezultă $\Delta BHC \sim \Delta C'HB'$ (*l.u.l*). **d)** Din **c)** se deduce $\sphericalangle B'C'H \equiv \sphericalangle B'BC$ și rezultă $\sphericalangle AC'B' \equiv \sphericalangle ACB$ (au același complement). $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$ (*u.u.*). **3. a)** Fie D simetricul punctului B față de A și D' simetricul lui B' față de A'. $\Delta CDB \sim \Delta C'D'B'$ (*l.l.l.*) $\Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (*l.u.l.*). **b)** $\Delta ACD \sim \Delta BAD$ (I.C.) $\Rightarrow \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ABD$ și, cum $m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle BAD) = 90^\circ$, rezultă $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$. **4.a)** $\Delta ADE \sim \Delta ACB$; $\mathcal{P}_{ADE} = 8,1$ cm. **b)** Relația din ipoteză este echivalentă cu $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$ care cu *l.u.l.* conduce la $\Delta ABC \sim \Delta CBD$. Se obține $m(\sphericalangle A) = 36^\circ$ etc.

Test 82. 1. a) Cu **teorema catetei** în ΔABC se obține $BC = 6$ cm, apoi cu **teorema lui Pitagora**, $AC = 2\sqrt{6}$ cm și $AD = 2\sqrt{2}$ cm. **b)** Se aplică **teorema lui Pitagora** în ΔADC, apoi **teorema I a înălțimii** în ΔABC și **teorema lui Pitagora** în ΔABD. $DC = \sqrt{2}$ dm, $BD = 8\sqrt{2}$ dm, $AD = 12$ dm. **c)** $AB = \sqrt{10}$ cm; $BC = 5$ cm; $DC = 3$ cm; $AC = \sqrt{15}$ cm. **2.a)** $AP = 3NA$. Se aplică **teorema I a înălțimii**: $MA^2 = NA \cdot 3NA$ și se obține $NA = \sqrt{6}$ cm, apoi $NP = 4\sqrt{6}$ cm, $MN = 2\sqrt{6}$ cm, $MP = 6\sqrt{2}$ cm. **b)** $NP = \frac{9}{5}AP$. Cu **teorema catetei** se obține $AP = 4\sqrt{5}$ cm, apoi $NP = \frac{36\sqrt{5}}{5}$ cm, $MA = 8$ cm, $MN = \frac{24\sqrt{5}}{5}$ cm. **3. a)** $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow m(\sphericalangle B) = 90^\circ$. **b)** $BEDF$ este dreptunghi.

Utilizând **teorema a doua a înălțimii** în triunghiurile ABC, ABD și BCD se obține $DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm și $DF = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm. $\mathcal{P}_{BEDF} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm. **4.** Se demonstrează în fiecare din cazurile **a), b), c),** folosind asemănarea triunghiurilor, că $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.

Test 83. 1. a) 1) 4 m; **2)** $4\sqrt{2}$ cm;

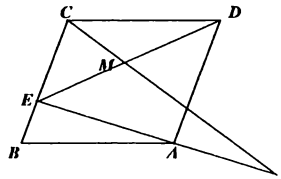


Fig. 16

b) $AD=\frac{2}{3}\cdot 2BD=\frac{4}{3}BD$ Cu teorema lui Pitagora în ΔABD se obține $BD=9$ cm, apoi $BC=18$ cm, $AD=12$ cm; $BE\cdot AC=AD\cdot BC \Rightarrow BE=14{,}4$ cm. BM se determină din ΔEBM, dreptunghic în E, după ce s-a determinat EM. **c)** Se constată că $AC>BC>AB$ și $AC<BC+AB$ deci ΔABC există. Se construiește $BD\perp AC$, $D\in AC$ și rezultă $D\in(AC)$. Fie $AD=x$. Atunci $CD=AC-x$, $BD^2=AB^2-x^2$, $BD^2=BC^2-(AC-x)^2$, de unde se obține ecuația $AB^2-x^2=BC^2-(AC-x)^2$; $x=\frac{7\sqrt{2}}{6}$ cm; $BD=\frac{\sqrt{190}}{6}$ cm. Celelalte înălțimi se determină cu teorema: *În orice triunghi produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare este constant,* utilizată și la punctul precedent. **2.** Cu **teorema lui Pitagora** în ΔADE **(fig. 16)** se obține $DE=4\sqrt{5}$ cm, iar în ΔABE se obține $BE=3$ cm și rezultă $CE=5$ cm, $CM=\sqrt{5}$ cm; $CN=5\sqrt{5}$ cm (**teorema catetei** în ΔEAC). **3. a)** ΔABC este dreptunghic în C (reciproca teoremei lui Pitagora). Fie $CE\perp AB$, $E\in AB$. Se obține $CE=5{,}4$ cm, deci $CD=4{,}2$ cm. **b)** Construiți înălțimile $[AE]$ și $[DF]$, notați BE cu x și exprimați lungimile înălțimilor în funcție de x. Obțineți ecuația $13^2-x^2=20^2-(21-x)^2$ care are soluția unică 5. $AE=12$ cm. **4.** Notăm rombul cu $ABCD$. Putem presupune că $m(\sphericalangle BAD)<90^\circ$. Fie $BE\perp AD$, $E\in AD$. Se determină AE (din ΔABE), ED apoi BD. Din ΔAOD (am notat O centrul rombului) se determină AO. $BD=8\sqrt{13}$ cm; $AC=12\sqrt{13}$ cm.

Test 84.1. c) $\cos C=\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}C=\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}C=\frac{4}{3}$; $\sin B=\frac{4}{5}$; $\cos B=\frac{3}{5}$. **2. a)** $\left(10+2\sqrt{5}\right)$cm **b)** 24m; **c)** 48cm. **3. a)** $AB=3\sqrt{5}$ dm, $BC=9$ dm; $CA=6\sqrt{2}$ dm, $m(\sphericalangle C)=45^\circ$. **b)** Construiți $BE\perp AC$, $E\in AC$. $BC=4\sqrt{3}$ dm; $AD=4$ dm; $m(\sphericalangle B)=90^\circ$; $m(\sphericalangle C)=30^\circ$. **c)** Construiți $BE\perp AC$, $E\in AC$. $m(\sphericalangle A)<45^\circ$; $AB=6\sqrt{6}$ dm; $AC=6\left(1+\sqrt{3}\right)$dm; $AD=3\left(3+\sqrt{3}\right)$dm. **4.** $\operatorname{tg}(\sphericalangle B)=\operatorname{tg}(\sphericalangle C)\Rightarrow AD^2=BD\cdot DC$, unde $AD\perp BC$ $(D\in BC)\Rightarrow m(\sphericalangle BAC)=90^\circ$ **(reciproca teoremei înălțimii)**. $AC=8$ cm, $\sin B=\frac{4}{5}$, $\cos C=\frac{16}{25}$.

Test 85. 1. a) $m(\sphericalangle C)=45^\circ$; $CA=4\left(1+\sqrt{3}\right)$m; $BC=4\sqrt{2}$ m; $AD=2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$m. **b)** Se impune analiza a două cazuri: I. $D\in(BC)$; II. $D\in(CB-[BC]$. În cazul I obținem: $m(\sphericalangle B)=60^\circ$; $m(\sphericalangle C)=45^\circ$; $m(\sphericalangle A)=75^\circ$; $BC=(3+\sqrt{3})$ m iar în cazul II, $m(\sphericalangle B)=120^\circ$; $m(\sphericalangle C)=45^\circ$; $m(\sphericalangle A)=15^\circ$; $BC=(3-\sqrt{3})$m.**c)** $BC=16$m; $AD=4\sqrt{3}$ m; $m(\sphericalangle B)=30^\circ$; $m(\sphericalangle C)=60^\circ$. **2. a)** $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow m(\sphericalangle B)=45^\circ$. Fie $AD\perp BC$, $D\in BC$,

$\operatorname{tg} C = 2 \sin C \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle C) = 60^\circ$. Rezultă că $m(\sphericalangle A) = 75^\circ$.

b) Din ΔABD se obține $AB = 6\sqrt{2}$ dm, apoi din ΔADC se deduce că $AC = 4\sqrt{6}$ dm. **3.** Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$. Din relația $\sin B = \cos C$ se obține $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ care conduce la $\Delta ADB \sim \Delta CDA$ (i.c.), ceea ce implică $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle C$. Rezultă că $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$. Cu **teorema lui Pitagora** se obține $AC = \sqrt{6}$ cm. **a)** $\operatorname{tg} B = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg} C = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **b)** $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = (\sqrt{3} + 3 + \sqrt{6})$ cm.

4. $DC = AB = 4\sqrt{3}$ dm; $BC = AD = 6\sqrt{3}$ dm; $DF = 9$ dm. **5. a)** $MS = \frac{PM}{2} =$ $= 0{,}9$ km $= 900$ m **(teorema unghiului de 30°)**; **b)** $MS = PS = \frac{MP}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}8}{\sqrt{2}} =$ $= 0{,}9\sqrt{2}$ km $= 900\sqrt{2}$ m $\simeq 900 \cdot 1{,}41 = 1269$ m.

Test 86. 1. a) $\mathcal{A}_{ABC} = 16$ cm^2; $CE = 6{,}4$ cm; **b)** $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ dm^2; $AD = 3\sqrt{3}$ dm; $CE = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ dm. **c)** $AD = 12$ cm. Se poate utiliza formula $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$; $\sin A = \frac{63}{65}$; **d)** $BC = 4\sqrt{3}$ dm; $S_{ABC} = 12\sqrt{3}$ dm^2. **2. a)** Fie $BE \perp AC$, $E \in AC$. Determinați BE, apoi AE, CE și BC. $BC = 7$ cm. **b)** $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 60^\circ$, deci $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$. $AC = \sqrt{3}$ dm; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ dm^2; **c)** $m(\sphericalangle C) = 60^\circ$, înălțimea $BE = 6\sqrt{3}$ cm, rezultă $BC = 12$ cm, apoi $EC = 6$ cm deci $E = A$, adică $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$. $\mathcal{P}_{ABC} = 6(3 + \sqrt{3})$ cm. **3. a)** Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, atunci $AD \cdot BM = AD \cdot CM$.

b) $[BE]$ și $[CE]$ sunt mediane în triunghiurile ABM și, respectiv ACM. $\mathcal{S}_{ABC} = 18$ cm^2.

4. a) $[AO]$ este mediană în ΔADB, deci $\mathcal{S}_{AOD} = \mathcal{S}_{AOB}$; $[BO]$ este mediană în ΔABC, deci $\mathcal{S}_{AOB} = \mathcal{S}_{BOC}$ etc. **b)** $\mathcal{S}_{ABMN} = \mathcal{S}_{AOB} + \mathcal{S}_{AON} + \mathcal{S}_{BOM} + \mathcal{S}_{MON}$. Fie $\mathcal{S}$ aria paralelogramului $ABCD$. Avem: $\mathcal{S}_{AOB} = \frac{\mathcal{S}}{4}$; $\mathcal{S}_{AON} = \frac{\mathcal{S}_{AOD}}{2} = \frac{\mathcal{S}_{BOC}}{2} = \mathcal{S}_{BOM}$ și cum $\mathcal{S}_{AOD} = \mathcal{S}_{BOC} = \frac{\mathcal{S}}{4}$, rezultă $\mathcal{S}_{AON} = \mathcal{S}_{BOM} = \frac{\mathcal{S}}{8}$. $\Delta MON \sim \Delta COD$, deci $\frac{\mathcal{S}_{MON}}{\mathcal{S}_{COD}} = \left(\frac{OM}{OC}\right)^2 = \frac{1}{4}$, deci $\mathcal{S}_{MON} = \frac{\mathcal{S}_{COD}}{4} = \frac{\mathcal{S}}{16}$. Deci $\mathcal{S}_{ABMN} = \frac{9 \cdot \mathcal{S}}{16} = 56{,}25\%\ \mathcal{S}$.

Test 87. 1. a) Se determină cealaltă catetă, apoi ipotenuza și se aplică **teorema a doua a înălțimii**; 26,4 m; **b)** 64 dm; **c)** 140 cm^2. **2. a)** Fie $AD \perp BC$ și $GE \perp BC$, $D, E \in BC$. Se arată că $GE = \frac{1}{3} AD$. *Altă abordare:* Dacă $GC \cap AB = \{M\}$, atunci $[CM]$ și $[OM]$ sunt, respectiv, mediane în triunghiurile ΔABC și ΔABG ceea ce implică $\mathcal{S}_{AMC} = \mathcal{S}_{BMC}$ și $\mathcal{S}_{AMG} = \mathcal{S}_{BMG}$, de unde rezultă $\mathcal{S}_{AGC} = \mathcal{S}_{BGC}$ etc. **b)** $\frac{2}{3}$;

3. a) Din ΔADC se determină AC și DC, apoi, cu **teorema catetei** în ΔABC, se obține $BC = 24$ dm. $\mathcal{S}_{ABC} = 72\sqrt{3}$ dm^2. **b)** $\Delta CDE \sim \Delta CBA$ (t.f.a.). Rezultă $\frac{\mathcal{S}_{CDE}}{\mathcal{S}_{ABC}} = \left(\frac{CD}{CB}\right)^2 = \frac{9}{16}$. **4. a)** Cu **teorema catetei** în ΔADC se obține $AC = 50$ cm, apoi, cu **teorema lui Pitagora**, $DC = 30$ cm. $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 160$ cm; $\mathcal{S}_{ABC} = 1200$ cm^2. **b)** $d(C, AB) = h_C = 48$ cm.

Test 88. 1. a) $8\sqrt{13}$ m; **b)** Notăm dreptunghiul cu $ABCD$. Fie O centrul dreptunghiului și $m(\sphericalangle AOD) = 45^\circ$. Construim $AE \perp DB$, $E \in DB$. Din ΔEAO se obține $AE = 10$ m. $\mathcal{S}_{ABCD} = 2\mathcal{S}_{ABD} = 200\sqrt{2}$. **c)** Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ și $BC = x$. Se deduce că $AC = 2x$, $AB = x\sqrt{3}$. Se obține $x = 6$. Aria dreptunghiului este egală cu $18\sqrt{3}$ cm^2. **d)** Se arată că ΔAOB echilateral și cum $\mathcal{S}_{AOB} = \mathcal{S}_{ABCD} : 4$, rezultă $\mathcal{S}_{AOB} = 27\sqrt{3}$ cm^2, de unde se obține $AB = 6\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{P}_{ABCD} = 12(3+\sqrt{3})$ cm. **2. a)** $10\sqrt{2}$ cm^2; **b)** $84\sqrt{3}$ cm^2. **c)** Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB < CD$, $AC \cap BD = \{O\}$. ΔOAB și ΔOCD sunt dreptunghice isoscele. Se obține $OB = 3\sqrt{2}$ cm; $OD = 4\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; $AD = 5\sqrt{2}$ cm. **3.** $216\sqrt{3}$ cm^2; 18 cm.

b) $PQ = 2$ cm. Fie $AL \perp MN$, $L \in MN$ și $\{K\} = AL \cap PQ$. $\mathcal{S}_{AQP} = \frac{1}{2} \cdot QP \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot QP \cdot (LK - AL) = \frac{1}{2} \cdot 2(2 - \sqrt{3})$ cm^2. **4. a)** $24\left(8 + \sqrt{3}\right)$cm^2;

b) Se determină suma bazelor, apoi lungimile lor. $\mathcal{P} = 60$ cm. **5. a)** Suprafața necultivată cu legume este mai mare sau egală cu aria ΔADC. (egalitate avem dacă $A = M$). Dar $\mathcal{A}_{\Delta ADC} = \frac{80 \cdot 25}{2} = 1000$ m^2. Răspunsul este negativ.

b) $\mathcal{P}_{AMCD} = 80 + 25 + 80 - x + \sqrt{25^2 + x^2} = 190$, de unde $\sqrt{25^2 + x^2} = x + 5$ sau $25^2 + x^2 = x^2 + 10x + 25$. Deci $x = 60$ m.

Test 89. 1. a) $m(\sphericalangle P) = m(\sphericalangle Q) = 75^\circ$; $m(\sphericalangle N) = m(\sphericalangle M) = 105^\circ$; $m(\sphericalangle(MP, NQ)) = 90^\circ$.

b) $\sphericalangle MPQ \equiv \sphericalangle NMP$; **c) 1)** C și D sunt mijloacele segmentelor $[NP]$ și $[MQ]$;

2) $CD \| AB$ (**reciproca teoremei lui Thales**) implică $\Delta OCD \sim \Delta OAB$, de unde

$\frac{CD}{AB}=\frac{OC}{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** Fie M mijlocul coardei $[AB]$. Deoarece $OM=\frac{AB}{2}=4$ cm, rezultă că triunghiul AOB este dreptunghic isoscel. Din $m(\widehat{AB})=90°$ şi $R=4\sqrt{2}$ cm. **3.** Triunghiul AOB este echilateral. $d(O, AB)=\frac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ cm şi $AB=10$ cm.

4. $OC=OD=CD=10$ cm. $BC^2=225-100=125$, de unde $BC=5\sqrt{5}$ cm şi $AB=10\sqrt{5}$ cm.

Test 90. 1. a) $AB=80$ cm; $MB=\frac{AB}{2}=40$ cm şi $AM=AB\cos 30°=$ $=80\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$ cm. **b)** $AB=9$ cm şi $MA=MB=AB\sin 45°=9\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4,5\cdot\sqrt{2}$ cm.

2. a) $m(\widehat{AD})=360°-(110°+50°+92°)=108°$; **b)** $m(\sphericalangle BAD)=\frac{110°+92°}{2}=101°$; $m(\sphericalangle ABC)=\frac{108°+110°}{2}=109°$; $(\sphericalangle BCD)=\frac{108°+50°}{2}=79°$; $m(\sphericalangle ADC)=\frac{92°+50°}{2}=71°$;

c) $m(\sphericalangle ABD)=\frac{108°}{2}=54°$; $m(\sphericalangle DBC)=\frac{110°}{2}=55°$; $m(\sphericalangle ADB)=\frac{50°}{2}=25°$; $m(\sphericalangle BDC)=\frac{92°}{2}=46°$ etc.;

d) $\frac{50°+110°}{2}=80°$; **e)** $180°-[m(\sphericalangle ADC)+m(\sphericalangle BCD)]=$ $=180°-(71°+79°)=30°$. **3.** Fie $AD\perp BC$, $D\in BC$. Cum $[AB]\equiv[AC]$, rezultă că AD este mediatoarea segmentului BC, deci $O\in AD$. Dacă $(AD\cap\mathcal{C}(O)=\{E\}$ (**fig. 17**), atunci $m(\sphericalangle ACE)=90°$. Cu **teorema lui Pitagora** în ΔADC, determinaţi AD, apoi cu **teorema catetei** în ΔACE, aflaţi AE. $R=14,08(3)$ cm. **4.** Arătaţi că punctul Q este ortocentrul triunghiului PAB, dacă ordinea punctelor pe semicerc este A, M, N, B şi punctul P este ortocentrul triunghiului QAB dacă ordinea punctelor pe semicerc este A, N, M, B, etc.

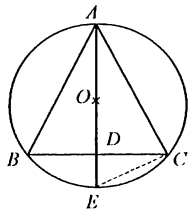


Fig. 17

Test 91. 1. Unitatea de măsură pentru lungime şi arie este cm şi, respectiv, cm^2.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
R	10	6	13	13	$3\sqrt{2}$	1,2	2,4
$\mathcal{L}$	20π	12π	26π	26π	$6\sqrt{2}\,\pi$	$2,4\pi$	$4,8\pi$
$\mathcal{A}$	100π	36π	169π	169π	18π	$1,44\pi$	$5,76\pi$

2. Fie punctul M mijlocul coardei $[AB]$. Avem $MB=\frac{5}{12}\sqrt{3}$ cm şi, $\cos(\sphericalangle ABO)=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\sqrt{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Deci $m(\sphericalangle ABO)=30°$ şi $m(\sphericalangle AOB)=120°$, de unde $m(\widehat{AB})=120°$.

3. $\sin(\sphericalangle ABO) = \frac{2,5\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deci $m(\sphericalangle ABO) = 30°$ şi $m(\sphericalangle AOB) = 120°$, de unde $m(\overset{\frown}{AB}) = 120°$. **4.** Triunghiul AOB este dreptunghic isoscel şi urmează că $AB = R\sqrt{2}$, de unde $R = 7$ cm. $\mathcal{A} = \pi R^2 = 49\pi$ cm^2 şi $\mathcal{L} = 2\pi R = 14\pi$ cm.

5. a) Aria nehaşurată este egală cu suma ariilor celor două semidiscuri. Deci aria haşurată este egală cu aria pătratului $ABCD$, adică $120^2 = 14400$ m^2.
b) Lungimea gardului = $AB + CD$ + lungimea discului cu raza de 60 m = $240 + 2\pi \cdot 60 = 60 \cdot (4 + 3\pi) = 60 \cdot (4 + 9,42) = 13,42 \cdot 60 = 805,2$ m^2.

6. a) Aria haşurată = $\frac{1}{2}\pi \cdot 30^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot 10^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot 20^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot (30^2 - 10^2 + 20^2) =$

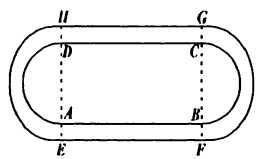
$= \frac{1}{2}\pi \cdot 1200 = 600\pi$ cm^2. Aria discului mare = $\pi \cdot 30^2 = 900\pi$ cm^2. Raportul =

$= \frac{900\pi - 600\pi}{600\pi} = \frac{1}{2}$. **b)** Aria nehaşurată = $\frac{1}{2}\pi \cdot 30^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot 10^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot 20^2 = 700\pi$ cm^2.

Aria haşurată $900\pi - 700\pi = 200\pi$ cm^2. Raportul $= \frac{700\pi}{200\pi} = \frac{7}{2}$.

7. a) Balconul de la bucătărie are raza egală cu $\frac{5+3,5-5,5}{2} = 1,5$ m, iar cel de la sufragerie are raza de 2 m. Suprafaţa apartamentului (fără balcoane) = $(4 + 5 + 3,5) \cdot 6 = 75$ m^2. Suprafaţa ambelor balcoane = $\frac{1,5^2\pi}{2} + \frac{2^2\pi}{2} = 3,125\pi$ m$^2 \simeq 9,81$ m^2. Suprafaţa totală $\simeq 84,81$ m^2. **b)** Suprafaţa balcoanelor este egală cu $3,125\pi \simeq$ $\simeq 9,8125$ m^2. $\frac{75}{100}$ din suprafaţa cumpărată = 9,8125 m^2. Ionescu a cumpărat $\frac{9,8125 \cdot 100}{75} \simeq 13,08$ m^2 de material **c)** Suprafaţa băii şi a bucătărici = $3,5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 7 + 12 = 19$ m^2. Ionescu a cumpărat 19 m^2 + $\frac{10}{100}$ din 19m^2 = 20,9 m^2 de gresie şi a achitat pentru aceasta $20,9 \cdot 20 = 418$ lei.

d) A achitat $\frac{104}{100}$ din (84,81 · 500 Euro)=44101,2 Euro.



8. a) Dacă atletul merge pe partea interioară a pistei, atunci el parcurge $10 \cdot (AB \cdot 2 + 2\pi \cdot 40) = 10 \cdot (300 + 80\pi) = 5512$ m. Dacă se deplasează pe marginea exterioară a pistei, atunci el parcurge $10 \cdot (AB \cdot 2 + 2\pi \cdot 45) = 5826$ m. Atletul parcurge între 5512 şi 5826 m.

b) Aria terenului = Aria dreptunghiului $ABCD$ + 2 · Aria semidiscului cu raza $\frac{AD}{2}$ $= AB \cdot AD + 2\pi \cdot 40^2 \cdot \frac{1}{2} = 150 \cdot 80 + 1600 \cdot 3{,}14 = 17024$ m^2.

Acoperirea terenului a costat $17024 \cdot 100 = 1702400$ lei.

c) Aria pistei $= A_{ABHK} \cdot 2 + 2 \cdot \left[\pi \cdot \left(\frac{HE}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{AD}{2}\right)^2\right] = AB \cdot AE \cdot 2 + 2\pi \cdot (45^2 - 40^2) =$

$= 80 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 85 = 800 + 2669 = 3469$ m^2. S-au cumpărat $3469 \cdot 100 =$ $= 346900 = 346{,}9$ kg de sămânță. **d)** Gazonul a costat $346{,}9 \cdot 100 = 34690$ lei.

Test 92. 1. $l_3 = R\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ cm; $a_3 = \frac{R}{2} = 4$ cm; $\mathcal{A} = \frac{l_3^2\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$ cm.

2. $l_4 = a_4 \cdot 2 = 24$ cm; $\mathcal{A} = l_4^2 = 576$ cm^2. **3.** Dacă $l_3 = 4\sqrt{3}$ cm, atunci $R = 4$ cm și $a_3 = \frac{R}{2} = 2$ cm. Deci poligonul este triunghi echilateral. $\mathcal{A} = \frac{l_3^2\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ cm^2. **4.** Dacă $R = 4\sqrt{2}$, atunci $l_4 = R\sqrt{2} = 8$ cm. Deci poligonul este pătrat. $\mathcal{P} = 32$ cm și $\mathcal{A} = 64$ cm^2.

Test 93. 1. b; **2.** b; **3.** d; **4.** c; **5.** c; **6.** a; **7.** a; **8.** a; **9.** d; **10.** R 24 cm și $r = 12\sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})$ cm. (vezi problema **3**, **test 107**) **11.** Fie $OM \perp AB$ ($M \in AB$) și $ON \perp CD$ ($N \in CD$). *Cazul I.* Coardele $[AB]$ și $[CD]$ sunt situate de aceeași parte a centrului cercului. Avem: $OM^2 = OB^2 - MB^2 = R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 100 - 6^2 = 64$,

de unde $OM = 8$ cm. $ON^2 = OD^2 - ND^2 = R^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = 100 - 8^2 = 36$, de unde

$ON = 6$ cm. Aria triunghiului $= \frac{(12+16) \cdot (8-6)}{2} = 28$ cm^2. *Cazul II.* Coardele $[AB]$ și $[CD]$ sunt situate de o parte și de alta a punctului O. În acest caz înălțimea trapezului are lungimea de 14 cm și aria egală cu 196 cm^2.

12. $l_3 = 20\sqrt{3}$ cm și $l_4 = 20\sqrt{2}$ cm. $\mathcal{A}_3 = \frac{l_3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{400 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 300\sqrt{3}$ cm^2.

$\mathcal{A}_4 = l_4^2 = 400 \cdot 2 = 800$ cm^2. $\frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. $\mathcal{P}_3 = 20\sqrt{3} \cdot 3 = 60\sqrt{3}$ cm;

$\mathcal{P}_4 = 20\sqrt{2} \cdot 4 = 80\sqrt{2}$ cm; $\frac{\mathcal{P}_3}{\mathcal{P}_4} = \frac{60\sqrt{3}}{80\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$.

Test 94. 4. a) Numărul minim de drepte este 1 (când punctele sunt coliniare); numărul maxim de drepte este 15 (ele sunt: *AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE,*

BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF); **b)** Da. Dacă exact 5 din ele sunt coliniare; **c)** Numărul minim de plane este 1, numărul maxim este 20. **5. a)** Numărul minim de drepte este 18 când 8 din cele 9 puncte coplanare sunt coliniare. *Atenție!* Dacă 9 puncte ar fi coliniare, atunci toate cele 10 puncte ar fi coplanare, imposibil! deci oricare 9 din cele 10 puncte nu trebuie să fie coliniare; numărul maxim de drepte este 45; **b)** 10 plane și respectiv 37 de plane; **c)** DA; **d)** DA.

Test 95. 2. **a)** A; **b)** F; **c)** F. **3. i) a)** F; **b)** F; **c)** A. **ii) a)** F; **b)** F; **c)** A; **d)** F.

Test 96. 4. **a)** Cele trei perechi de fețe opuse; **b)** (BCA), (BCA'), (BCD'), (BCB'). 5. $AB \| CD$ și $CD \| MN \Rightarrow AB \| MN$.

Test 97. 1. **l. a)** 0°; **b)** 90°; **c)** 45°; **d)** 60°; **e)** 45°; **f)** 45°; **g)** 45°; **h)** 45°; **i)** 0°. **2. a)** 45°; **b)** 90°; **c)** 60°; **d)** 60°. **3.** Cu **reciproca teoremei lui Thales** se arată că $MQ \| AC$ și $MP \| AB$. **4.** Aplicați teorema: "*dacă un plan intersectează două plane paralele, intersecțiile sunt drepte paralele*". Analizați cazurile: **1)** $A \in (BC)$; **2)** $B \in (AC)$. Se obține $BE = 60$ cm și, respectiv, $BE = 15$ cm.

Test 98. 1. **a)** F; **b)** F; **c)** A. **3.** $MC = 20$ cm, $MB = 10\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{MBD} = \frac{BD \cdot MO}{2} = 50\sqrt{5}$ cm^2, unde $\{O\} = AC \cap BD$. **4. a)** Demonstrați prin reducere la absurd și țineți seama de unicitatea perpendicularei duse dintr-un punct pe un plan. **b)** Fie M și N mijloacele segmentelor $A'C'$ și respectiv $B'D'$ iar O mijlocul segmentului BD; OM și ON sunt linii mijlocii în trapezele $ACC'A'$ și respectiv $BDD'B'$.

Avem $ON = OM = \frac{6+8}{2} = \frac{10+4}{2} = 7$ cm, deci $M = N$ și rezultă că $A'C' \cap B'D' = \{M\}$.

5. Dacă $M \in (ABC)$, atunci M este și ortocentrul ΔABC. Dacă $M \notin (ABC)$, atunci fie $MO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Triunghiurile dreptunghice MOA, MOB și MOC sunt congruente (cazul I.C.) de unde rezultă că O este și ortocentrul ΔABC adică $OA \perp BC$. Cum $BC \perp OM$ și $OA \cap OM = \{O\}$ rezultă că $BC \perp (OAM)$, adică $MA \perp BC$ etc.

Test 99. 1. $d(M, CD) = 10\sqrt{2}$ cm; $d(M, AB) = d(M, AD) = 10$ cm; $d(M, BD) = 5\sqrt{6}$ cm. **2.** $d(M,AB) = d(M,AC) = \frac{3\sqrt{353}}{8}$ cm, $d(M,BC) = \frac{3\sqrt{177}}{8}$. **3.a)** $d(M,BC) = 10$ cm; $d(M,DC) = 6\sqrt{2}$ cm; $d(M,AD) = d(M,AB) = 6$cm. **b)** $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm; $MA = 5$cm; $d(M, AC) = 5$cm; $d(M,BD) = \frac{\sqrt{769}}{5}$ cm. **4.** $d(M,BC) = MC = 10\sqrt{6}$ cm; $d(M,AC) = d(M,AD) = d(M,AB) = 10\sqrt{3}$ cm; $d(M,DC) = 5\sqrt{15}$ cm; $d(M,BD) = 20$ cm.

Test 100. 1.**a)** Fie O centrul pătratului (**fig. 18**). OP este linie mijlocie în ΔBMD, deci $OP \| MB$ și cum $OP \subset (PAC) \Rightarrow MB \| (PAC)$. **b)** AP este mediană, deci este și înălțime în ΔAMD isoscel.(1). Se arată că $DC \perp (MAD)$, de unde rezultă că $DC \perp AP$.(2).

Din (1) şi (2) $\Rightarrow AP \perp (MCD)$. **c)** Din **T.3.⊥.** rezultă că $MB \perp BC$. Se obţine $\mathcal{A}_{MBC} = 8\sqrt{2}$ cm^2. **2.** Din $MA \perp (ABC)$ şi $BD \subset (ABC) \Rightarrow BD \perp AM$, dar $BD \perp AO$ şi, cum $BD \cap AC = \{O\}$, rezultă $BD \perp (AOM)$. Deci $OM \perp BD$ $(OM \subset AOM)$ şi urmează că $d(M,BD) = OM$. Din triunghiul dreptunghic AOM se obţine $OM = 5\sqrt{7}$ cm, $d(M,BC) = d(M,DC) = 5\sqrt{7}$ cm **(fig.19). 3. a)** $AC \perp (MBD)$;

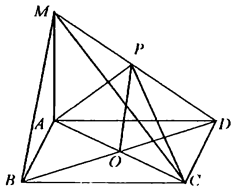


Fig. 18

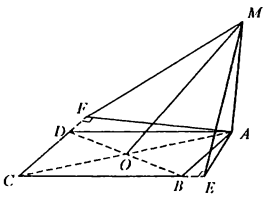


Fig. 19

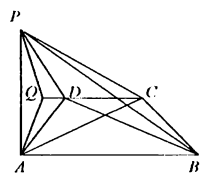


Fig. 20

b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$ şi $OF \perp MD$, $F \in MD$. Din $OF \perp MD$ şi $OF \perp AC$ (pentru că $AC \perp (MBD)$ şi $OF \subset (MBD)$) rezultă că $d(AC,MD) = OF$. Din $\Delta DFO \sim \Delta DBM$ se obţine $OF = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **c)** Fie $BT \perp CE$, $T \in CE$. Se obţine $MT = \frac{\sqrt{21}}{2}$. **4.** Se arată că $AC \perp CB$, $DB \perp AD$. Fie $AQ \perp DC$ $(Q \in DC)$ **(fig.20).** Utilizând **T.3.⊥.** se obţine că $PC \perp BC$; $PD \perp DB$ şi $PQ \perp DC$. Deci $d(P,BC) = PC$; $d(P,DB) = PD$ şi $d(P,DC) = PQ$. Utilizând **teorema lui Pitagora** şi funcţii trigonometrice se obţine: $PC = 2a$; $PD = a\sqrt{2}$ şi $PQ = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

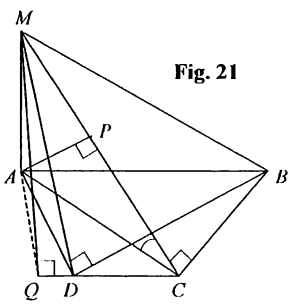


Fig. 21

5. Aplicând **T.3.⊥** rezultă că $MC \perp BC$; $MD \perp DB$ şi $d(M,BC) = MC = 5\sqrt{21}$, iar $d(M,DB) = MD = 5\sqrt{13}$cm **(fig. 21).** Fie $AQ \perp DC$ $(Q \in DC)$; din **T.3.⊥.** rezultă $MQ \perp DC$, deci $d(M, DC) = MQ$. $AQ = 5\sqrt{3}$ şi $MQ = 10\sqrt{3}$ cm.

Test 101. 1. $OC = 2\sqrt{7}$ cm, $OB = 6$cm, $d(P,AB) = \frac{6\sqrt{41}}{5}$ cm. **2.** Fie u măsura unghiului format de dreapta d cu planul α. **a)** $A'B' = AB \cos u \Rightarrow \cos u = \frac{2}{5}$;

$C'D' = CD \cos u \Rightarrow C'D' = \frac{2}{5} \cdot 8 = 3{,}2$ cm ;

$B'C' = BC\cos u = 6\cdot\frac{2}{5} = 2{,}4$ cm. **b)** $AB = 10$ cm.

3. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}$. **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **1. 4. a)** $\Delta OAA' \equiv \Delta OBB'$(I.U.) **(fig.22). b)** Se aplică **a)**. Există 7 plane. **5.** Aplicați **4.a)**.

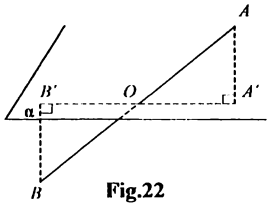


Fig.22

Test 102. 1. $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 0; nu există; $2\sqrt{2}$. **2. a)** 48cm; **b)** $12\sqrt{3}$; **c)** 60°. **3.a)** $8\sqrt{3}$cm; 8 cm; $4\sqrt{3}$cm; $\frac{2\sqrt{390}}{5}$cm; $\frac{6\sqrt{102}}{5}$cm. **b)** 60° și 30°. **4. a)** $2a$; $\frac{a\sqrt{7}}{2}$; $a\sqrt{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **b)** 30°; 45°; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Test 103. 1. 30°. **2.** Fie $MO \perp \alpha$; $O \in \alpha$ și $OP \perp AB$, $P \in AB$ și $OM = x$. Avem: $AM = 2x$, $MB = \sqrt{2}\,x$ și din ΔMAB dreptunghic rezultă $x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Din **T.3.⊥.** rezultă $MP \perp AB$; $MP = \frac{MA\cdot MB}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$; $OP = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

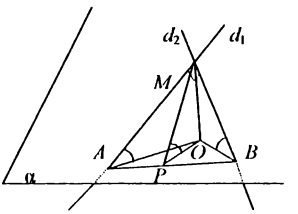


Fig. 23

$S_{OAB} = a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}$. $\sphericalangle((MAB),(OAB)) = \sphericalangle OPM$; $\operatorname{tg}(\sphericalangle OPM) = \frac{a\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{6}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\sphericalangle OPM) = 60°$ **(fig.23). 3.** Fie $\{D\} = pr_u A$. Dacă $DC \perp BC$, atunci din **T.3.⊥.** rezultă $AC \perp BC \Rightarrow 13^2 = 15^2 + 14^2$, contradicție! Analog se arată că $m(\sphericalangle DBC) \neq 90°$. Se duce $DM \perp BC$, $M \in (BC)$ de unde rezultă că $m(\sphericalangle((ABC),\alpha)) = m(\sphericalangle AMD)$. Notăm $DC = b$; $BD = a$; $AD = c$. Din **teorema lui Pitagora** rezultă: $a^2 + b^2 = 196$; $b^2 + c^2 = 225$; $a^2 + c^2 = 169$ de unde $a = \sqrt{70}$; $b = 3\sqrt{14}$ și $c = 3\sqrt{11}$; $DM = \frac{a\cdot b}{BC} = 3\sqrt{5}$. Deci $\operatorname{tg}(\sphericalangle(AMD)) = \frac{\sqrt{55}}{5}$. **4. a)** $m(\sphericalangle A) = 75°$; $m(\sphericalangle B) = 45°$; $m(\sphericalangle C) = 60°$. **b)**Fie $AM \perp BC$ ($M \in BC$). Avem $AB = 10\sqrt{3}$; $AM = MB = 5\sqrt{6}$. Din **T.3⊥.** rezultă $PM \perp BC$; $PM^2 = AM^2 + AP^2 = 150 + 25 = 175 \Rightarrow$ $\Rightarrow PM = 5\sqrt{7}$cm; $S_{PBC} = \frac{BC\cdot PM}{2} = \frac{25\sqrt{14}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$. **c)** $(PAM) \perp (PBC)$, $d(A,(PBC)) = AT$, unde $AT \perp PM$; $T \in PM$, $AT = \frac{5\sqrt{42}}{7}$; **d)** $\operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Test 104. 1. Fie γ un plan care trece prin A și este perpendicular pe α iar d perpendiculara dusă prin A pe α. Rezultă $d \subset \gamma$, dar d este unică. **2.** $AC = 6\sqrt{2} = AD = CD$;

3. Fie P mijlocul segmentului (AB) şi $PQ \perp BD$, $Q \in (BD)$. OP este linie mijlocie în ΔABN, deci $OP \parallel AN$, adică $OP \perp AB$ şi, cum $(ABC) \perp (ABN)$, rezultă $OP \perp (ABC)$. Din **T.3.⊥.** rezultă $OQ \perp BD$. Se obţine $OQ = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm. **4. a)** Din $AB = BC$ (laturile rombului sunt congruente) şi $m(\sphericalangle ABC) = 60°$, rezultă că triunghiul ABC este echilateral, deci $AC = AB = 8$ cm. Deoarece diagonalele rombului se înjumătăţesc şi sunt perpendiculare, avem $AO = \frac{AC}{2} = 4$ cm şi **(1)** $AO \perp BD$. **(fig.24).**

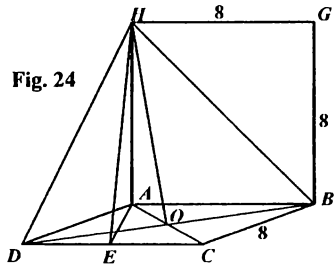


Fig. 24

$(ABH) \perp (ABC), (ABH) \cap (ABC) = AB$ şi $HA \perp AB$ ($ABGH$ este pătrat) implică **(2)** $AH \perp (ABC)$. Din **(1)** şi **(2)** se deduce, aplicând teorema celor 3 perpendiculare, că $HO \perp BD$, deci $d(H, BD) = HO$. Din **(2)** rezultă că triunghiul AOH este dreptunghic cu $m(\sphericalangle HAO) = 90°$. Aplicând **teorema lui Pitagora** se obţine $HO = \sqrt{AH^2 + OA^2} = 4\sqrt{5}$ cm, deci $d(H, BD) = 4\sqrt{5}$ cm. **b)** Construim $AE \perp CD, E \in CD$. Cu **teorema celor 3 perpendiculare** se arată că $HE \perp CD$, deci $d(H, CD) = HE$. $[AE]$ fiind înălţime în triunghiul echilateral ADC (triunghiurile ADC şi ABC sunt congruente), avem $AE = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm. Din **(2)** se deduce că triunghiul AEH este dreptunghic cu $m(\sphericalangle HAE) = 90°$ şi cu **teorema lui Pitagora** se obţine $HE = \sqrt{AH^2 + AE^2} = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{7}$ cm, deci $d(H, CD) = 4\sqrt{7}$ cm. **c)** Dreapta de intersecţie a planelor (ABC) şi (HBD) este BD, dreptele AO şi HO (prima inclusă în (ABC), iar a doua în (HBD))sunt perpendiculare pe BD, de unde rezultă că $m(\sphericalangle((ABC),(HBD))) = m(\sphericalangle AOH)$. $\sin(\sphericalangle AOH) = \frac{AH}{OH} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **5. a)** Utilizând **T.3⊥** se arată că $DA \perp AB$ apoi cu **teorema lui Pitagora** în ΔACD se obţine $DA = 2a$. **b)** $AB \perp (ADC)$. **c)** BD este ipotenuză în triunghiurile dreptunghice ABD şi CBD; $PQ \parallel CD$, $CD \perp (ABC)$, de unde $PQ \perp (ABC)$. Dacă M este mijlocul lui $[AC]$, atunci măsura unghiului dintre planele (ABC) şi (APC) este egală cu $m(\sphericalangle QMP) = 60°$. **d)** $QA \perp BC$, $(ABC) \perp (DBC)$ şi $PC \subset (DBC) \Rightarrow AQ \perp PC$.

Test 105. 1.a) Vezi **fig. 25**; **b)** $AA_1' = 32\sqrt{3}$; **c)** 60°; **d)** $768\sqrt{3}$ cm^2; $256(3\sqrt{3}+1)$cm^2; $2048\sqrt{3}$ cm^3; $8\sqrt{17}$ cm. **2.** $4\left(3\sqrt{10}+12\sqrt{5}+20\sqrt{2}\right)$ cm^2; 240 cm^3; $3\sqrt{22}$ cm. **3.** 192 cm^2; 13 cm. **4.** $10\sqrt{61}$ cm; 72000 cm^3. **5.a)** 130 cm; **b)** $A'B' = 30$ cm; **c)** $\frac{120\sqrt{10}}{13}$ cm.

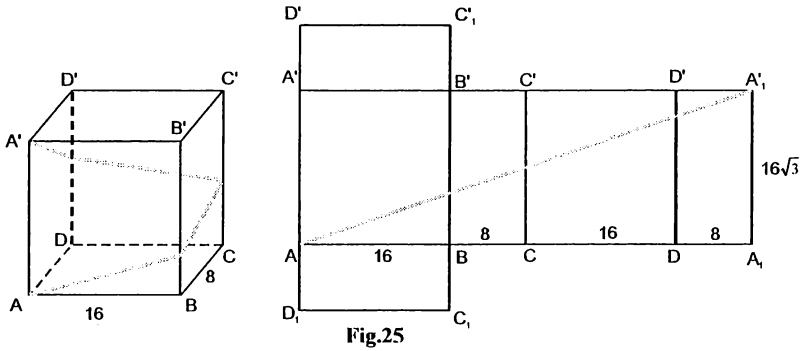


Fig.25

Test 106. 1. a) 30 cm; 270 cm^3. **b)** 264 dm^3; 282dm^2. **c)** $480\sqrt{2}$ cm^2; 1200cm^3; **d)** $32\sqrt{161}$ cm^2; $64\sqrt{161}$ cm^3. **2.a)** Se desfăşoară paralelipipedul. Lungimea minimă a drumului este de $4\sqrt{601}$ cm. **b)** $\frac{24\sqrt{601}}{601} = \cos u$. **3.** 405 hl. **4.** Fie a,b,c dimensiunile paralelipipedului. Avem: $\frac{ac+bc}{17,5} = \frac{ab+bc}{16} = \frac{ab+ac}{13,5} = \frac{94}{47} = 2$.

$$\begin{cases} ac + bc = 35 \\ ab + bc = 32 \\ ab + ac = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 12 \\ ac = 15 \\ bc = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Test 107. 1. Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului. Avem: $a^2 + b^2 = 34$; $a^2 + c^2 = 41$ şi $b^2 + c^2 = 25$, de unde rezultă $a^2 + b^2 + c^2 = 50$, deci diagonala are $5\sqrt{2}$ m şi $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ m^3. **2.a)** $BB' = 10\sqrt{2}$ cm, m $At = 200(1 + 2\sqrt{2})$cm^2, $V = 100\sqrt{2}$ cm^3; **b)** Fie $AP \perp A'D$, $P \in (A'D)$ **(fig.26)**. Din **T.3** $\perp$ rezultă $BP \perp A'D \Rightarrow d(A,A'D) = BP$. Se obţine $BP = \frac{10\sqrt{15}}{3}$ cm.. **c)** Fie O centrul bazei prismei.

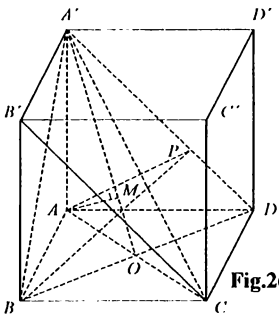


Fig.26

Se arată că $(A'AC) \perp (A'BD)$. Dacă $AM \perp A'O$; $M \in A'O$, atunci $AM = d(A,(A'BD)) = 2\sqrt{10}$ cm. **3.** Fie E şi F picioarele perpendicularelor din A, respectiv C, pe DB'. $EF = |DF - DE|$. Aplicând teorema catetei în triunghiurile dreptunghice $B'AD$ şi $B'CD$ se obţine $B'D = 6$ cm şi $BB' = \sqrt{6}$ cm. **4.** Fie $CE \perp DM$. Din **T.3** $\perp$ rezultă $NE \perp DM$. Deci $\sphericalangle((DMN),(ABC)) = \sphericalangle NEC$; $S_{MNC} = S_{ABCD} - (S_{ADM} + S_{BMC}) = 300$ cm^2 $= \frac{DM \cdot EC}{2}$, de unde $EC = 24$ cm. ΔNEC este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle NEC) = 45°$.

Test 108. 1. a) Dacă a este lungimea muchiei cubului, atunci: $a\sqrt{3}=6\sqrt{3}\Rightarrow a=6$cm. **b)** $\mathcal{A}=2(3x-2)^2$; $\mathcal{V}=\frac{\sqrt{3}(3x-2)^3}{9}$. **2.** $3\sqrt{3}$. **3.** Dacă a este muchia cubului avem: $a\sqrt{3}-a\sqrt{2}=\frac{15\sqrt{3}-15\sqrt{2}}{2}$, de unde $a=7{,}5$cm. **4.** Fie O centrul feței $BCC'B'$. Din $D'C'\perp(BCC')$; $C'B\perp B'C$ și $B'C,\ BC'\subset(BCC')\overset{T.3.\perp}{\Rightarrow} D'O\perp B'C$. Din $\Delta D'C'O$ dreptunghic se obține $D'C'=24$ cm. **5.** $2d^2=d_1^2+d_2^2+d_3^2$ și din relația dată rezultă că $(d_1-d_2)^2+(d_1-d_3)^2+(d_2-d_3)^2=0\Rightarrow d_1=d_2=d_3$ etc.

Test 109. 1. a) Muchia cubului are lungimea de 4 cm. **b)** Muchia cubului are lungimea de 5 cm. **2.** Muchia cubului are lungimea de 6 cm. **3.** Dacă a,b,c sunt dimensiunile paralelipipedului, atunci avem: $2ab+2ac+2bc=a^2+b^2+a^2+$ $+c^2+b^2+c^2\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\Leftrightarrow a=b=c$. **4.** Utilizând a doua teoremă a înălțimii în triunghiurile dreptunghice ABC', ADC' și $AA'C'$ se obține de fiecare dată distanța de $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **b)** Se aplică teorema catetei în aceleași triunghiuri. **c)** $\Delta ABC'\equiv\Delta C'D'A\equiv\Delta AA'C'\equiv\Delta C'CA$ (I.U.). **d)** $\Delta ACD'$ este echilateral.

Test 110. 1.a) Se arată că $B'C\perp(ABC')$ și că $\Delta D'MN$ este dreptunghic. **b)** $AC'\parallel MN$ etc. **2. a)** Se aplică **T.3.⊥** sau că $\Delta ACD'$ este isoscel. **b)** 96 cm^2; 64cm^3. **c)** 216 cm^2; 216 cm^3; $9\sqrt{3}$ cm^2. **3.** Se aplică *teorema lui Pitagora* în ΔBMN, ΔAMP și $\Delta C'PN$. **4.** Se împarte cubul în 27 de cubulețe cu muchia de $\frac{1}{3}$ cm și apoi se aplică principiul cutiei.

Test 111. I. 1. a) 36; **b)** $36\sqrt{3}$; **c)** $180\sqrt{3}$. **2. a)** 240 cm^2, $\mathcal{A}_l=\left(240+50\sqrt{3}\right)$ cm^2; **b)** $\mathcal{V}=200\sqrt{3}$ cm^3; **c)** $2\sqrt{41}$ cm. **3.** Construim punctul D, simetricul lui C față de B. Atunci $\Delta AB'D$ este echilateral și $AD=AB'$ sau $AB\sqrt{3}=\sqrt{AB^2+BB'^2}$ de unde $BB'=6\sqrt{2}$. $\mathcal{A}_l=\left(108\sqrt{2}+18\sqrt{3}\right)$cm^2, $\mathcal{V}=54\sqrt{6}$ cm^3. **4.** Fie $AM\perp BC$ $(M\in BC)$. Cum $BB'\perp(ABC)$ și $AM\subset(ABC)$ rezultă $AM\perp(BCB')$. Fie $OP\perp MB'$ $(P\in MB')$, atunci $OP\perp(BCB')$ și $d(O,(BCC'))=\frac{1}{2}d(A,BC)$. Deci $\frac{AB\sqrt{3}}{2}=3\cdot 2$, de unde $AB=4\sqrt{3}$, $\mathcal{V}=48\sqrt{3}$ cm^3.

Test 112.1.a) $m=\sqrt{194}$; $a_p=13$; $\mathcal{A}_l=260$; $\mathcal{A}_t=360$; $\mathcal{V}=400$. **b)** $a=40$; $h=21$; $\mathcal{A}_l=2320$; $\mathcal{A}_t=3920$; $\mathcal{V}=11200$. **c)** $h=20$; $m=5\sqrt{34}$; $a_p=25$; $\mathcal{A}_l=2400$; $\mathcal{V}=6000$. **d)** $h=8$; $m=2\sqrt{34}$; $a_p=10$; $\mathcal{A}_l=240$; $\mathcal{A}_t=384$.

Test 113. 1. a) $\mathcal{A}_t=192\ cm^2$; $\mathcal{V}=\frac{256\sqrt{3}}{3}$; **b)** $\frac{\sqrt{15}}{3}$; **c)** $2\sqrt{3}$; **d)** $4\sqrt{3}$. **2. a)** $\mathcal{V}=48\ cm^3$; $\mathcal{A}_t=96\ cm^2$. **b)** $\frac{3}{5}$; **c)** $\frac{24}{5}$. **3. a)** Din $AC\perp(SOB)$ şi $OM\perp BS$ rezultă că $d(AC,SB)=OM=2\sqrt{3}$ cm. Din triunghiul dreptunghic SOB se obţine: $MB=2\sqrt{6}$ cm; $SB=3\sqrt{6}$ cm şi $SO=3\sqrt{2}$ cm. $\mathcal{A}_t=72\left(\sqrt{2}+1\right)cm^2$ şi $\mathcal{V}=72\sqrt{2}\ cm^3$. **b)** Din $AC\perp(SBD)$ rezultă $AC\perp OM$ şi $AC\perp SM$. Din triunghiul dreptunghic MOA se obţine: $AM=4\sqrt{3}$ cm. Din $SB\perp OM$ şi $SM\perp AC$ rezultă $SB\perp(AMC)$ de unde urmează unghiul plan al diedrului format de planele (SAB) şi (SBC) este $\sphericalangle AMC$. În triunghiul dreptunghic AOM avem $\sin(\sphericalangle MAO)=\frac{OM}{AM}=\frac{1}{2}$, deci $m(\sphericalangle AMC)=120°$. **4.** 33,(3) %.

Test 114.1. a) $m=20$; $a_p=5\sqrt{7}$; $\mathcal{A}_l=225\sqrt{7}$; $\mathcal{A}_t=225(\sqrt{7}+\sqrt{3})$; $\mathcal{V}=750\sqrt{3}$; **b)** $a=30$; $h=5\sqrt{13}$; $\mathcal{A}_l=900$; $\mathcal{A}_t=225(4+\sqrt{3})$; $\mathcal{V}=375\sqrt{39}$. **c)** $h=1,(3)\sqrt{309}$; $m=4\sqrt{29}$; $a_p=20$; $\mathcal{A}_t=32(2\sqrt{3}+15)$; $\mathcal{V}=85,(3)\sqrt{103}$. **d)** $h=10$; $m=2\sqrt{61}$; $a_p=2\sqrt{34}$; $\mathcal{A}_l=36\sqrt{102}$; $\mathcal{A}_t=36\sqrt{3}(\sqrt{34}+3)$.

Test 115.1. a) $\mathcal{A}_t=225\sqrt{3}\ cm^2$; $\mathcal{V}=375cm^3$; **b)** 60°; **c)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\frac{a}{3}$. **3. a)** 60°; **b), c)** Fie $VP\perp BC$ $(P\in BC)$ şi $OE\perp VP$ $(E\in VP)$, unde O este centrul ΔABC (**fig.27**). Avem $BC\perp(AVP)$, de unde rezultă că OE este distanţa de la O la planul (VBC) şi $BC\perp MP$, oricare ar fi punctul $M\in(AV)$. Aria ΔMBC este minimă dacă (MP) este minim, adică $MP\perp AV$. Se obţine $OE=\frac{15\sqrt{39}}{13}$ şi $MP=\frac{45}{4}$ iar $S_{MBC}=\frac{675}{8}\ cm^2$.

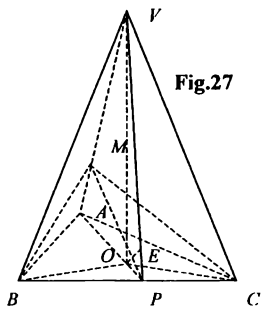
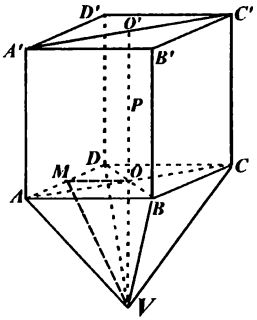


Fig.27

4.a) $\frac{243\sqrt{3}}{4}\ cm^3$; $\frac{81\sqrt{3}(\sqrt{13}+1)}{4}\ cm^2$; **b)** $\frac{27\sqrt{13}}{13}$ cm; $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ cm; **c)** $\frac{12}{13}$cm; **d)** 4,5cm; **e)** 25%.

5. a) Volumul bazinului = Volumul prismei + + Volumul piramidei = $120 \cdot 120 \cdot 40 + \frac{120^2 \cdot 60}{3} =$



$= 120^2 \cdot 40 + 120^2 \cdot 20 = 120^2 \cdot (40 + 20) =$
$= 120^2 \cdot 60 = 14400 \cdot 60 = 864000 \text{ cm}^3 = 864 \text{ dm}^3 = 864\ \ell.$
Apa din bazin ajunge pentru 864 : 432 = 2 zile.
b) Fie M mijlocul segmentului $[AD]$.

$a_p = VM = 60\sqrt{2}$ cm. A_l piramidă $= \frac{120 \cdot 4 \cdot 60\sqrt{2}}{2} =$

$= 240 \cdot 60 \cdot \sqrt{2} = 14400\sqrt{2} \text{ cm}^2 = 1{,}44\sqrt{2} \text{ m}^2.$
A_l prismei $= 120 \cdot 4 \cdot 40 = 120 \cdot 160 = 19200 \text{ cm}^2 = 1{,}92 \text{ m}^2.$
Aria capacului $= 120 \text{ cm} \cdot 120 \text{ cm} = 14400 \text{ cm}^2 = 1{,}44 \text{ m}^2.$
Aria suprafeței vopsite $= 1{,}44\sqrt{2} \text{ m}^2 + 1{,}92 \text{ m}^2 + 1{,}44 \text{ m}^2 \simeq 5{,}39 \text{ m}^2.$
Vopseaua a costat $5{,}39 \cdot 0{,}5 \cdot 20 = 53{,}9$ lei.

Test 116. 1. a) $\mathcal{A}_l = 144\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $\mathcal{V} = 144\sqrt{2} \text{ cm}^3$. **b)** $2\sqrt{2}$. **c)** $3\sqrt{6}$ cm. **2.** $ACB'D'$ şi $BDA'C'$, $\mathcal{V} = \frac{a^3}{3}$. **3.** $6\sqrt{6}$. **4.** Fie a lungimea muchiei tetraedrului. Din triunghiurile dreptunghice AOB şi BOM se obţine: $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $OM = \frac{\sqrt{2}}{6}a$; $a = 2$ cm;

$\mathcal{A}_l = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ şi $\mathcal{V} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.

5. a) Dacă notăm cu a lungimea muchiei tetraedrului, atunci înălţimea sa h este egală cu $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ m, de unde $a = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ m.

Aria totală a statuii $= \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 13{,}5\sqrt{3} \text{ m}^2$. Cantitatea de vopsea utilizată este egală cu $13{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot 400 = 5400 \cdot 1{,}73 = 9342 \text{ g} = 9{,}342 \text{ kg}$ de vopsea.

b) $V_{\text{statuii}} = \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{27\sqrt{3}}{8} \text{ m}^3$. Dacă notăm cu x cu câţi centimetri se ridică apa din bazin avem: $V = \frac{27\sqrt{3}}{8} = 4 \cdot 4{,}5 \cdot x$, de unde

$x = \frac{27\sqrt{3}}{18 \cdot 8} \cdot 100 = \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot 100 = \frac{519}{16} \simeq 32{,}44 \text{ cm}.$

Capitolul II. MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

Test 117. Barem de corectare și de notare - I: 1. 16 (5 p). **2.** 4 (5 p). **3.** 11/29 (5 p). **4.** 2 (5 p). **5.** 5 (5 p). **6.** 30 (5 p).

II.1. Desenează corect piramida *SABCD*. (4 p); notează corect (1 p). **2.** Numărul cărților de pe raftul al II-lea = 48 cărți (3 p); în total sunt 72 de cărți (2 p). **3. a)** 55 : 4 = 13 rest 3 (2 p); 55 : 7 = 7 rest 6 (2 p); deci, pot fi 55 de bomboane. (1 p); **b)** Fie x numărul minim de bomboane; $x = 4a + 3$ și $x = 7b + 6$ (2 p); justificarea faptului că $x = 27$ (3 p); **4.** $f(0) = -5$, $-5 \neq 5$, deci $P(0; 5) \in G$ (3 p). **5.** $(x + 2)^3 - x - 2 = (x + 2)[(x + 2)^2 - 1]$ (2 p); $(x + 2)(x + 2 - 1)(x + 2 + 1)$ (2 p); $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ (1 p).

III.1. a) $MB = 6 - x$ (2 p); $\mathcal{A}_{MBCG} = MB \cdot BC$ (1 p); $\mathcal{A}_{MBCG} = 5(6 - x)$ (2 p); **b)** $DG = 4 + x$ (2 p); $\mathcal{A}_{AMGD} = \ldots$ (1 p); $\mathcal{A}_{AMGD} = \ldots$ (2 p); **c)** $5(6 - x) = 5(x + 2)$ (2 p); finalizare $x = 2$ (3 p); **d)** $\mathcal{A}_{AMGD} = 5 \cdot 4 = 20$ m^2 (1 p); 20 m^2 > 10 m^2 deci se acordă reducere; pentru 1 m^2 de gresie va plăti $80 - 80 \cdot 5\% = 76$ lei (2 p); toată gresia costă $76 \cdot 21 = 1596$ lei (2 p); **2. a)** $\mathcal{A}_{ABCD} = 36$ dm^2 (1 p); calculul apotemei piramidei: $SM = 3\sqrt{10}$ dm, unde M este mijlocul unei muchii a bazei (2 p); $\mathcal{A}_{\text{laterală}} = 36\sqrt{10}$ dm^2 (1 p); $\mathcal{A}_{\text{totală}} = (36\sqrt{10} + 1)$ dm^2 (1 p); **b)** $OT = SO - ST = 6$ dm (1 p); $\mathcal{V}_{TABCD} = 72$ dm^3 (Dacă elevul nu calculează volumul, dar scrie corect formula lui, se acordă 1 p și dacă calculează și volumul se acordă 2 p): finalizare 72 > 70, deci în bazin pot intra 70 litri de apă (2 p).

Test 118. Barem de corectare și de notare - I. 1 4 (5p); **2.** 5 (5p); **3.** 3 (5p); **4.** $4\sqrt{3}$ (5p); **5.** 60 (5p); **6.** 2 (5p). **II. 1.** Desenează piramida (4p); Notează piramida (1p). **2.** $\begin{cases} 9\ell + 7m = 76 \\ \ell + m = 10 \end{cases}$ (2p); $9(10 - m) + 7m = 76$ (1p); $m = 7$ (2p).

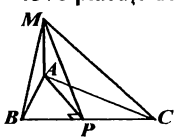
3. a) $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$ (2p); $25 < 30 < 40$ (2p); persoana cheltuiește cel mai puțin în a treia zi (1p). **b)** Persoana cheltuiește 95% din S, deci îi rămân 5% din S (2p); 5% din S = 100 (1p); S = 2000 lei (2p). **4.** $f(0) = 1 \Rightarrow A(0; 1)$ (2p); $f(1) = 0 \Rightarrow B(1; 0)$ (2p); Trasarea graficului funcției (dreapta AB) (1p). **5.** $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{10}$ (2p); $p = 7 + 2\sqrt{10} - \sqrt{10} - 2 - \sqrt{10} + 10$ (2p); $p = 15 \in \mathbb{N}$ (1p). **III. 1. a)** $AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2$ (2p); $AC' = 13$ m (3p); **b)** Aria laterală = $P_b \cdot h$ (2p); $P_b = 32$ m (2p); Aria laterală = 96 m^2 (1p); **c)** 96000 litri = 96000 dm^3 = 96 m^3 (1p); $48 \cdot h_{\text{apă}} = 96$ (2p); $h_{\text{apă}} = 2$ m (2p). **2. a)** Raza cercului = 15 m (1p); Lungimea celor două semicercuri este egală cu lungimea unui cerc. Lungimea cercului = $2\pi R$ (2p); Lungimea gardului = $= (30\pi + 80)$ m (2p); **b)** Aria dreptunghiului = 1200 m^2 (1p); Aria celor două semicercuri = 225πm^2 (1p); Aria patinoarului = $(1200 + 225\pi)$m^2 (1p); $1200 + 225\pi < 1200 + 225 \cdot 3{,}15 < 2000$ (2p); **c)** Triunghiul ABC este isoscel (1p);

$\sin(\sphericalangle ABC) = \sin(\sphericalangle ABO) = \frac{OA}{AB}$, unde O este mijlocul laturii $[BC]$ (1p); $AO = 15$ m (1p); Din **teorema lui Pitagora** rezultă $AB = 25$ m (1p); $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ (1p).

Test 119. I. 1. 208 (5p). **2.** $\frac{3}{2}$ (5p). **3.** [0; 3] (5p). **4.** 10 (5p). **5.** 36 (5p). **6.** 35 (5p).

II. 1. Desenează piramida (4p). Notează piramida (1p). **2.** $m_a = \frac{a+b}{2}$ (1p). Suma numerelor este 35 (2p). Celălalt număr este $35 - 7 = 28$ (2p). **3. a)** Notăm cu x prețul înainte de reduceri. $90\% \cdot 90\%x = 81$ (3p). Rezolvarea ecuației: $x = 100$ lei (2p). **b)** $p\%$ din 100 lei = 81 lei (1p). $p = 81$ (2p). Deci prețul după cele două reduceri s-a micșorat cu 19% (2p). **4.** $f(2) = a$ (1p); $f(2) = 6 - 2a$ (2p); $6 - 2a = a \Rightarrow a = 2$ (2p). **5.** $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$ (2p); $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$ (2p); $\frac{x^2-2x-15}{x^2-10x+25} = \frac{x+3}{x-5}$ (1p). **III. 1. a)** Fie M mijlocul muchiei $[BC]$. AM este distanța de la punctul A la planul (BCE) (2p). $AM = \sqrt{3}$ m (3p); **b)** $A_b = \sqrt{3}$ m^3 (2p); $V_{\text{prismă}} = 3\sqrt{3}$ m^3 (1p pentru formulă) (3p); **c)** Aria totală a cortului $= 18 + 2\sqrt{3}$ m^2; $18 + 2\sqrt{3} = 18 + \sqrt{12} < 18 + \sqrt{16} = 22$, deci sunt suficienți 22 m^2 de pânză (2p). **2. a)** 1ha = 10000 m^2 (2p); 8 ha = 80000 m^2 (3p). **b)** ΔABP isoscel (1p). $\mathcal{A}_{ABP} = \frac{AB^2}{2}$ (1p); $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC$ (1p); $\frac{\mathcal{A}_{ABP}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{1}{4}$ (1p). Finalizare (1p); **c)** $2AB^2 = 80000$ (1p); Din **teorema lui Pitagora** rezultă $BP = 200\sqrt{2}$ m (2p); $BP \simeq 283$ m (1p).

Test 120. 1. 30. **2.** 90. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** b. **5.** 36. **6.** 40. **II. 2.** Lungimea drumului este de 75 km, iar a doua zi a parcurs 10 km. **3. a)** Notăm cu x numărul de zile după care în cele două depozite rămân cantități egale de grâu. Avem $1200 - 100x = 1600 - 200x$, de unde $x = 4$ zile; **b)** După 4 zile. **4.** $E(2009) = (2009 - 2008)^{2009} + (2008 - 2009)^{2009} = 1^{2009} + (-1)^{2009} = 0$. **5.** Știm că dacă $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $a = 0$. Cum $x^2 - 9 \in \mathbb{Q}$ ($x \in \mathbb{Q}$ și $9 \in \mathbb{Q}$), $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $(x^2 - 9)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, rezultă că $x^2 - 9 = 0$, adică $x \in \{-3; 3\}$. **III. 1. a)** $\mathcal{L} = 32$ m. **b)** Ariile celor două terenuri sunt egale cu 42 m^2 și respectiv, 38 m^2. **c)** $(32 + 32) - 4 = 60$ m. **d)** S-au cumpărat $(42 + 38 + 6) : 0{,}25 = 1376$ plăcuțe de piatră cubică care au costat $86 \cdot 25 = 2150$ lei. **2. a)** Cu **teorema lui Pitagora** se obține $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 20^2 + 21^2 = 841$, de unde $BC = 29$ cm și $MC^2 = AC^2 + AM^2 =$



$= 21^2 + 10^2 = 441 + 100 = 541$, de unde $MC = \sqrt{541}$ m, iar $MB^2 = AM^2 + AB^2 =$ $= 400 + 100 = 500$, de unde $MB = 10\sqrt{5}$ cm. **b)** Cum $MP^2 = AM^2 + AP^2$ rezultă că segmentul MP are lungimea minimă când segmentul $[AP]$ are lungimea minimă. Dar $[AP]$ are lungimea minimă dacă $AP \perp BC$. Cu teorema a doua a înălțimii în ΔABC se obține $AP = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{20 \cdot 21}{29} = \frac{420}{29}$ cm.

$$MP = \sqrt{100 + \left(\frac{420}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{84100 + 176400}{29^2}} = \frac{10\sqrt{2605}}{29} \simeq 17{,}6 \text{ m}.$$

Test 121. I. 1. 0,5. **2.** 2; 4; 5; 10. **3.** $2^2 \cdot 5$. **4.** 120. **5.** 15. **6.** $(5{,}63 + 3{,}25) : 2 = 4{,}44$. **II. 2.** Notăm cu x numărul mic. Numărul mare este $3x$. Avem $3x - x = 120$, de unde $x = 60$ și numărul mai mare este egal cu 180. **3. a)** 360 ha; **b)** 120 ha cu porumb; 150 ha cu grâu; 90 ha cu orz. **4.** $F(x) = x^2 + 2x + 1 + 2x - 14 + 1 =$ $= x^2 + 4x - 12 = x^2 + 6x - 2x - 12 = x(x + 6) - 2(x + 6) = (x + 6)(x - 2)$. **5.** Din $|x^2 - 4| \geqslant 0$ și $(x-2)^2 \geqslant 0$, rezultă că $x^2 - 4 = 0$ și $(x-2)^2 = 0$, de unde $x = 2$.

III. 1. NE este înălțime a triunghiului echilateral BCE, deci $NE = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$, de unde $BC = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot x$. $\mathcal{A}_{BCE} = \frac{BC \cdot NE}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} x \cdot x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{3}$. **b)** $\mathcal{A}_{ABCD} =$ $= AB \cdot BC = 300 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} x = 200\sqrt{3}\, x$ m^2. **c)** Din $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{BCE}$ rezultă că $200\sqrt{3} \cdot x = \frac{\sqrt{3}x^2}{3} \cdot 2$, de unde $x = 300$ m. **d)** $\mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{BCE} = 3 \cdot \mathcal{A}_{BCE} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 300^2 =$ $= 90000\sqrt{3}$ m^2. Costul total este egal cu $\frac{90000\sqrt{3} \cdot 120}{10000} \cdot 3{,}5 = 3780\sqrt{3} \simeq 6547$ lei.

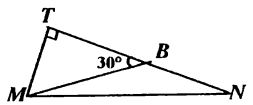
2. a) Aplicând **teorema lui Pitagora** în triunghiurile ABC, MAB, MAC și MAD avem: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 120^2 + 50^2 = 16900$, de unde $AC = 130$ m; $MD^2 = MA^2 +$ $+ AD^2 = 30^2 + 120^2 = 15300$, de unde $MD = 30\sqrt{17}$ m; $MB^2 = MA^2 + AB^2 = 900 + 2500$, de unde $MB = 10\sqrt{34}$ m. $MC^2 = AM^2 + AC^2 = 900 + 16900 = 17800$, de unde $MC = 10\sqrt{178}$ m. **b)** Avem: $MD > 30 \cdot 4 = 120$ m; $MB > 10 \cdot 5 = 50$ m și $MC > 10 \cdot 13 = 130$ m. Prin urmare, $MB + MC + MD > 300$m.

Test 122. I.1. 13. **2.** $(-\infty; 13)$. **3.** 81. **4.** $2\pi R = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} = 6\pi\sqrt{3}$ cm, $\mathcal{A}_l = 4 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = l^2 \cdot \sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm^2, de unde $l = 4$. **6.** $10 + 20 + 30 + 50 + 40 +$ $+ 60 + 20 = 230$ elevi. **II. 2.** $\frac{160}{420} = \frac{200}{x}$; $x = \frac{200 \cdot 420}{120} = 525$ tone de grâu. **3. a)** Notăm cu n numărul calculatoarelor. Obținem ecuația: $2 \cdot n + 5 = 3 \cdot (n - 3) + 2$,

echivalentă cu $2n + 5 = 3n - 9 + 2$, de unde $3n - 7 = 2n + 5$, ce implică $n = 12$; **b)** În clasă sunt $12 \cdot 2 + 5 = 29$ de elevi. **4.** $a = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -\sqrt{2}$; $b = \left|\sqrt{3} - 1\right| + \sqrt{3} + 1 - 3\sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1 - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$.

Deci $a > b$. **5.** $f(0) = -3$, deci $A \in G_f$. $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, deci $B \in G_f$.

III. 1. a) $m(\sphericalangle MBN) = 360° - [m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ABM) + m(\sphericalangle CBN)] = 360° - (90° + 60° + 60°) = 150°$. **b)** Suprafața colorată în albastru este egală cu 4. $\mathcal{A}_{MAB} = 4 \cdot \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3}$ dm^2.



c) Triunghiul MBN este isoscel cu $MB = BN = 8$ dm. Fie $MT \perp BN$. $m(\sphericalangle MBT) = 180° - m(\sphericalangle MBN) = 30°$. Avem $MT = \frac{MB}{2} = 4$ dm **(teorema unghiului de 30°)**. Deci $\mathcal{A}_{MBN} = \frac{BN \cdot MT}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$ dm^2. Aria modelului $= 4^2 + 64\sqrt{3} + 4 \cdot 16 = 64 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)$ dm^2. **d)** Suprafața colorată cu galben este egală cu 64 dm^2, iar cea colorată cu roșu este tot 64 dm^2. Răspuns: 100%.

2. a) Avem relațiile: $\begin{cases} 2a + 2b = 12\,\text{dm} \\ a + 2c = 10\,\text{dm} \\ 2b + 2c = 10\,\text{dm} \end{cases}$, de unde: $\begin{cases} a + b = 6\,\text{dm} \\ b + c = 5\,\text{dm} \\ 3a + 4b + 4c = 32\,\text{dm} \end{cases}$.

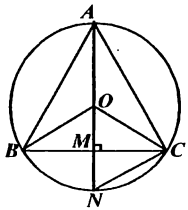
Din ultimele două relații se obține $3a + 4(b + c) = 3a + 4 \cdot 5 = 3a + 20 = 32$, de unde $a = 4$ dm. Se obține: $a = 4$ dm; $b = 2$ dm și $c = 3$ dm. $\mathcal{A}_t = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 52$ dm^2. **b)** Volumul canistrei $= 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ dm$^3 = 24$ ℓ. Răspunsul este afirmativ.

Test 123. I.1. 2. **2.** $(x-2)(x+2)$. **3.** $\frac{x+2}{x-2}$. **4.** $\pi 4^2 = 16\pi$. **5.** $6a^2 = 96$, de unde $a = 4$ m și $d = 4\sqrt{3}$ m. **6.** $30° = \frac{360°}{12}$. Lectura este preferată de $36 : 12 = 3$ elevi.

II.2. Elevul nu știe $42 - 28 = 14$ subiecte. Probabilitatea este egală cu $\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$.

a) Avem 7/721 și 2/721 –1; 3/721–1; 4/721 – 1; 5/721 – 1; 6/721 – 1. **3.b)** Conform **teoremei împărțirii cu rest** avem relațiile: $n = 2a + 1$; $n = 3b + 1$; $n = 4c + 1$; $n = 5d + 1$; $n = 6l + 1$, unde n este numărul de ouă din coș. Rezultă că $[2, 3, 4, 5, 6] / n - 1$. Deci $n - 1 \in \{60, 120, 180, 240, 300, ...\}$ și $n \in \{61, 121, 181, 241, 301, 361, ...\}$. Cel mai mic element al mulțimii care se divide cu 7 este 301. **4.** Avem $|(a-3)(a+3)| \geq 0$ și $(a-b)^2 \geq 0$ oricare ar fi numerele reale a și b rezultă că $|(a-3)(a+3)| = 0$ și $a - b = 0$, de unde $a = b = 3$ sau $a = b = -3$. **5.** $E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 - 3x^2 + 14 = x^2 + 6x + 10$.

III. 1. a) $OA = OB = OC$ conduce la ideea că punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, adică este punctul de intersecție a două din mediatoarele triunghiului ABC. **b)** $OA = R = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$ m.



c) $OA = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ m. **d)** Fie $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris ΔABC și ducem $AM \perp BC$ ($M \in BC$). Notăm $AM \cap \mathcal{C}(O, R) = \{N\}$. Cu teorema lui **Pitagora** în ΔAMC obținem $AM^2 = AC^2 - MC^2 =$ $= 100 - 36 = 64$, adică $AM = 8$ m. Dar $AC^2 = AM \cdot AN$ (**teorema catetei** în ΔANC), de unde $AN = \frac{100}{8} = 12{,}5$ m și $OA = \frac{AN}{2} = 6{,}25$ m. Cum $OA < AM$ concluzionăm că punctul O se află în interiorul ΔABC. **2. a)** Suprafața acoperișului este egală cu $2 \cdot (20 \cdot 6) = 240$ m^2. La îmbinări s-au folosit $240 \cdot \frac{8}{100} = 19{,}20$ m^2 de tablă. S-au cumpărat $240 + 19{,}20 = 259{,}20$ m^2 de tablă care a costat $259{,}20 \cdot 35 = 9072$ lei. **b)** Volumul grajdului $= 6 \cdot 20 \cdot 4 =$ $= 480$ m^3 și au fost adăpostite $480 : 12 = 40$ de vaci.

Test 124. I.1. –4. **2.** –2. **3.** $a = 24$ și $b = 2 + 6 + 12 + 20 = 40$. $m_a = \frac{24 + 40}{2} = 32$.

4. Triunghiul AOB este echilateral. $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2. . **5.** Cum $BD \parallel B'D'$ rezultă că $m|\sphericalangle(BD, A'C')| \equiv m[\sphericalangle(B'D', A'C')] = 90°$. Răspuns 90°. **6.** Ora 5 și 45 de minute. **II. 2.** 38,30 lei. **3. a)** 20 și, respectiv, 22 de probleme; **b)** 110%. **4.** $f(0) = -4$ și $f(2) = 0$. Deci A, B sunt punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele Oy și, respectiv, Ox. **5.** $n = 1$ avem $10^1 - 10 = 0$ evident. $n \geq 2$ conduce la $10^n - 10 = \underbrace{999...90}_{(n-1)\ cifre}$, de unde $9 / 10^n - 10$. **III. 1. a)** Dreapta r este mediatoarea segmentului (BC). Deci triunghiul MBC este isoscel și $(MB'$ este bisectoarea $\sphericalangle BMC$. Dar $\sphericalangle A'MA \equiv \sphericalangle B'MC$ (opuse la vârf), deci $m(\sphericalangle BMB') =$ $= m(\sphericalangle AMA') = \alpha°$. **b)** Dacă $M \neq N$, atunci în triunghiul ACN avem $AC < AN + NC$. Dar $AC = MA + MC = MA + MB$. Cum $NB = NC$ rezultă că $MA + MB < NA + NB$. Dacă $M = N$, atunci $MA + MB = NA + NB$. **c)** Din **b)** rezultă că lungimea minimă a conductei se realizează dacă stația este plasată în punctul M. Din $\Delta AA'M \sim \Delta CB'M$ ($u.u.$) rezultă că $\frac{MB'}{MA'} = \frac{CB'}{AA'}$, de unde $\frac{MB'}{MB' + MA'} = \frac{CB'}{CB' + AA'}$. Deci $\frac{MB'}{42} = \frac{24}{56}$ și $MB' = \frac{24 \cdot 42}{56} = 18$ km. Prin urmare, stația este plasată la 18 km de punctul B'. **d)** Aplicând **teorema lui Pitagora** în triunghiurile MBB' și MAA' se obține: $MB = 30$ km

şi $MA = 40$ km. Deci $MA + MB = 70$ km. S-au cheltuit $1500 \cdot 70000 = 105000000$ lei. Răspunsul este afirmativ. **2. a)** $\mathcal{A}_{l\ \text{piramidă}} = \mathcal{S}_{VAB} \cdot 4 = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 1{,}2^2\sqrt{3} = 1{,}44\sqrt{3}$ m^2. $\mathcal{A}_{l\ \text{paralipipcd}} = \mathcal{P}_b \cdot 4 = 4 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}5 = 7{,}2$ m^2. $\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = 1{,}2^2 = 1{,}44$ m^2. Suprafaţa tablei folosite $= (1{,}44\sqrt{3} + 8{,}64)$ m^2 $\simeq 11{,}13$ m^2. **b)** În triunghiul isoscel VAC avem: $VA^2 + VC^2 = AC^2$, deci $m(\sphericalangle AVC) = 90°$ sau $\Delta VAC \equiv \Delta BAC$ (L.L.L.) şi $OV = \frac{AC}{2} = \frac{1{,}2\sqrt{2}}{2} = 0{,}6\sqrt{2}$ m. $\mathcal{V}_{\text{piramidei}} = \frac{1.2^2 \cdot 0.6\sqrt{2}}{3} = 0{,}288\sqrt{2}$ m^3 $= 288\sqrt{2}$ dm^3. Cum $288\sqrt{2} < 1488\sqrt{2}$, rezultă că apa ocupă şi o porţiune din partea prismatică a bazinului. Avem $0{,}288\sqrt{2} + 1{,}2^2 \cdot OP = 1{,}488\sqrt{2}$, de unde

$$OP = \frac{1{,}2\sqrt{2}}{1{,}2^2} = \frac{\sqrt{2}}{1{,}2} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{2}. \quad VP = OP + OV = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{2} + \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{43}{30} \cdot \sqrt{2} \text{ m.}$$

Observaţie. Pentru ca problema să fie posibilă trebuie să ne asigurăm că $OP \leq OO'$!

Test 125. I.1. $10(0{,}05 + 0{,}75) = 10 \cdot 0{,}8 = 8$ sau $10\left(\frac{1}{20} + \frac{3}{4}\right) = 10\left(\frac{1}{20} + \frac{15}{20}\right) =$

$= 10 \cdot \frac{16}{20} = \frac{16}{2} = 8$. **2.** $xy = 36$. **3.** $a = 5$. **4.** $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 15^2 - 9^2 = (15-9)(15+9) =$

$= 6 \cdot 24 = 144$, $AB = 12$. **5.** $72 \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$ cm^2. **6.** 30 *l*.

II. 2. 6 robinete ..... 8 ore

10 robinete ..... x. $\quad \frac{6}{10} = \frac{x}{8}$, de unde $x = 4$ ore şi 48 minute.

3. a) 32; **b)** 8. **4.** Fie x preţul iniţial al obiectului. Avem $x + \frac{20}{100}x = 90000$ lei, de unde $x = 75000$ lei sau $\frac{120}{100}x = 90000$ lei etc.

5. $E(x) = \left[\frac{x-2/2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+2/x}{(x-2)^2} - \frac{(x-2)^2/1}{x+2}\right] \cdot \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 1}$.

$$E(x) = \frac{2x - 4 + x^2 + 2x - x^2 + 4x - 4}{(x-2)^2(x+2)} \cdot \frac{\left(x^2-4\right)^2}{x^2-1}. \quad E(x) = \frac{8(x-1)}{(x-2)^2(x+2)} \cdot \frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-1)(x+1)}$$

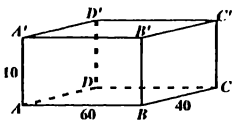
$$E(x) = \frac{8(x+2)}{x+1}.$$

III.1. a) Fie $CP \perp AB$ ($P \in AB$). Patrulaterul $ABCD$ fiind trapez isoscel avem $PB = \frac{AB - CD}{2} = 8$ cm şi cu **teorema lui Pitagora** se obţine $CP = 6$ cm. $AN = AP - NP =$

$= (80-8)-(64-x) = 8+x$. $\mathcal{A}_{ANMD} = \frac{(AN+DM)\cdot MN}{2} = \frac{(8+x+x)\cdot 6}{2} = 6(x+4)$.

b) $\mathcal{A}_{AIKD} = \frac{(80+64)\cdot 6}{2} = 432\ cm^2$. $\mathcal{A}_{MCIBN} = 432-(24+6x) = 408-6x = 6(68-x)\ cm^2$.

c) Avem ecuația: $6(x+4) = \frac{1}{3}\cdot 6(68-x)$ care este echivalentă cu $24+6x=136-2x$ ce are soluția 14. **d)** $\mathcal{A}_{MNIK} = 6(68-x) = 6(68-14) = 54\cdot 6 = 324\ cm^2 = 0{,}0324\ m^2$. Costul plăcii $MNBC$ este egal cu $0{,}0324 \cdot 300 = 9{,}72$ lei. **2. a)** După îndoire dimensiunile cutiei sunt egale cu: 60 cm; 40 cm și 10 cm. Volumul cutiei $= 60\cdot 40\cdot 10 = 24000\ cm^3 = 24\ dm^3 = 24\ \ell$. Răspunsul este negativ. **b)** Diagonala cutiei are lungimea egală cu: $d = \sqrt{60^2+40^2+10^2} =$



$= \sqrt{10^2(6^2+4^2+1)} = 10\sqrt{53}$ cm. Avem $30\sqrt{6} > 10\sqrt{53}$ pentru că $900\cdot 6 > 100\cdot 53$. Răspunsul este negativ.

Test 126. I.1. $0{,}875 = \frac{875^{(125}}{1000} = \frac{7}{8}$. **2.** $\frac{49}{64}$. **3.** $\frac{15}{27} = \frac{5}{9}$. **4.** $6x+2x = 180$, de unde $x = 22°30'$. **5.** Unghiul plan corespunzător unghiului diedru este unghiul $m(\sphericalangle BAC) = 60°$. **6.** $120 : 4 = 30$ de elevi.

II.2. S-a încasat $98{,}5\cdot 2{,}8 + 115\cdot 2{,}85 = 275{,}8 + 327{,}75 = 603{,}55$ lei. **3. a)** 36.

b) 16; 24; 32; 4. **4.** $2a^2-2a = 2\cdot\frac{3+1+2\sqrt{3}}{4} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1 = 1$.

5. $(x-3)^3-x+3 = (x-3)^3-(x-3) = (x-3)\cdot\left[(x-3)^2-1\right] = (x-3)(x-3-1)(x-3+1) =$

$= (x-2)(x-3)(x-4)$.

III.1. a) Lungimea gardului $= 2\cdot(90+72) = 162\cdot 2 = 324$ m. Un metru liniar de gard a costat $9720 : 324 = 30$ lei. **b)** Aria ambelor alei este egală cu $(90+72-1)\cdot 1 = 161\ m^2$. Aria feței superioare a unei plăci cubice este egală cu $0{,}2^2 = 0{,}04\ m^2$. Numărul plăcilor utilizate pentru pavarea aleelor este egal cu $161 : 0{,}04 = 4025$. **c)** Aria cultivată a grădinii este egală cu $90\cdot 72 - 161 = 6480 - 161 = 6319\ m^2 = 0{,}6319$ ha. **d)** Producția de căpșuni este egală cu $0{,}6319\cdot 10 = 6{,}319$ tone $= 6319$ kg. Suma încasată este egală cu $6319\cdot 2 = 12638$ lei.

2. a) Volumul apei care s.a evaporat este egală cu $18\cdot 6\cdot 0{,}05 = 5{,}4\ m^3 = 5400\ \ell = 54$ hl.

b) Pompa a funcționat $5400 : 900 = 6$ ore.

Test 127. I. 1. 4. **2.** 1. **3.** $\{2\}$. **4.** 36. **5.** Avem $BD'^2 = 3^2+4^2+12^2 = 169$, de unde $BD' = 13$ cm. $\sphericalangle((BD'),(ABC)) \equiv \sphericalangle DBD'$. $\sin(\sphericalangle DBD') = \frac{DD'}{BD'} = \frac{12}{13}$.

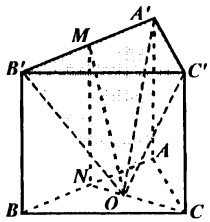
6. Numărul persoanelor care au răspuns „Da" reprezintă 40% din numărul persoanelor intervievate. 40% din $1500\cdot\frac{40}{100} = 600$. Răspuns 600.

II. 2. 416,25 + (416,25 – 15,50) = 817 km. **3. a)** 560 lei; **b)** 1400 lei.

4. $m_g = \sqrt{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt{4-3} = 1$. **5.** Avem $3x + 6 - 5 \leq x + 4$, de unde $2x \leq 3$. Cum $x \in \mathbb{N}$ rezultă că $x \in \{0;1\}$.

III. 1. a) $AB = 1008 : 4 = 252$ km. Cu **teorema lui Pitagora** în ΔABC se obține $AC = 252\sqrt{2}$ km. Arătăm că $252\sqrt{2} < 360$. Cum $98 < 100$ implică $7\sqrt{2} < 10$, de unde $252\sqrt{2} < 360$. **b)** Avem: 30 m/s $= \frac{30 \cdot 3600}{1000} = 108$ km/h. 40 m/s $= \frac{40 \cdot 3600}{1000} = 144$ km/h; (108 + 144) = 252 · 2 = 504 km. **c)** 3,5(108 + 144) = 252 · 3,5 = 882 km. **d)** $x \cdot (108 + 144) = 1008$, de unde $x = 4$. Se întâlnesc după 4 ore.

2. a) Fie punctele M și N mijloacele muchiilor $[A'B']$ și $[AB]$.



Avem $ON = \frac{1}{3}NC = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{60\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 30$ cm.

Cu **teorema lui Pitagora** în ΔMON se obține $OM = 10\sqrt{57}$ cm. Suprafața tablei = $\mathcal{A}_{\text{laterală a piramidei}} = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{3 \cdot 60\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{57}}{2} = 2700\sqrt{19}$ cm^2.

b) $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \frac{B'C'^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3600 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2700\sqrt{3}$ cm^2. Volumul apei care se varsă = Volumul piramidei $= \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot h}{3} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot AA'}{3} = \frac{2700\sqrt{3} \cdot 40\sqrt{3}}{3} = 108000$ cm^3 = = 108 dm^3 = 108 l.

Test 128. I. 1. 18. **2.** E(1) = 1 – 2 + 2 – 1 + 1 = 1. **3.** 2,1 ha = 2,1 · 10000 = = 21000 m^2. **4.** (40 + 60) : 2 = 50 m. **5.** Din $MA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$; $AB, BC \subset (ABC)$ conform **teoremei celor trei perpendiculare** rezultă că $MB \perp BC$. Deci distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu MB. Cu **teorema lui Pitagora** în ΔMAB obținem: $MB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm. **6.** Avem:

$$\frac{27+25+31+36+34+42+41+40+32+24}{10} = \frac{332}{10} = 33,2^\circ \text{ C}.$$

II. 2. $3x + 40 = 100$, de unde $x = 20$; **3. a)** 250; 200; 150; 90. **b)** $\frac{p}{100}$ din 250 = 150, de unde $p = \frac{150 \cdot 100}{250} = 60$. Deci 60 %. **4.** Graficul este dreapta AB, unde $A(-3;0)$ și $B(0;3)$ (intersecția graficului cu axele de coordonate) **5.** Avem $x^2 - x + 2x - 2 - 12 + 3x < x^2 - 6x + 9 + 1$, de unde $-x + 2x + 3x + 6x < 9 + 1 + 2 + 12$ sau $10x < 24$. Deci $x \in (-\infty; 2,4)$.

III.1.a) $MN \parallel BC$ în ΔABC cu teorema fundamentală a asemănării avem: $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AC}=x$, de unde $MN = 16x$. **b)** $MP \parallel CD$ în ΔADC cu teorema fundamentală a asemănării avem: $\frac{MP}{CD}=\frac{AM}{AC}=x$, de unde $MP = 20x$.

c) Perimetrul paralelogramului $MNAP$ este egal cu $2 \cdot (16x + 20x) = 72x$.

d) $\frac{\mathcal{A}_{ANMP}}{\mathcal{A}_{ABCD}}=\frac{1}{3}$, de unde $\frac{\mathcal{A}_{AMN}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{1}{3}$. Dar $\Delta MAN \sim \Delta CAB$ (t.f.a.), deci $\frac{\mathcal{A}_{AMN}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AC}\right)^2=x^2=\frac{1}{3}$, de unde $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **2. a)** Fie punctul M mijlocul muchiei (BC), în ΔVBM cu **teorema lui Pitagora** se obține: $VM^2 = VB^2 - MB^2 =$ $= 100 - 36 = 64$, de unde $VM = 8$ m. $\mathcal{A}_{l\ piramidei\ VABCD} = \frac{P_b \cdot a_p}{2}=\frac{12 \cdot 4 \cdot 8}{2}=192\ m^2$.

b) Volumul apei din piscină $= \mathcal{A}_b \cdot h = 12^2 \cdot 2{,}5 = 144 \cdot 2{,}5 = 360\ m^3$ $360000\ l$ apă.

Test 129. I. 1. $\{-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15\}$. **2.** 2,2. **3.** $a + b = 4$ și $a \neq 0$ conduce la $(a,b) \in \{(1,3)(2,2)(3,1)(4,0)\}$ Deci $\overline{ab} \in \{13; 22; 31; 40\}$. **4.** 3 cm.

5. $d = \sqrt{6^2+8^2+10^2} = 10\sqrt{2}$ m.

6. $\frac{160 \cdot 4 + 158 \cdot 3 + 161 \cdot 5 + 162 \cdot 2 + 155 \cdot 10 + 159 \cdot 1}{4+3+5+2+10+1}=\frac{3952}{25}=158{,}08$ cm.

II. 2. Avem $x + 5x = 420$, de unde $x = 70$. Mihai are 70 lei, iar Ionel are 350 lei.

3. a) 90 de secunde; **b)** 3, respectiv, 2 tururi. **4.** Intersecția graficului cu axele sistemului de coordonate sunt punctele $A(3;0)$ și $B(0; -3)$. $\mathcal{A}_{AOB}=\frac{OA \cdot OB}{2}=\frac{9}{2}=$ $= 4{,}5$ unități de arie. **5.** $E(x) = \left[\frac{1}{x-2}-\frac{6}{(x-2)(x+2)}-\frac{2}{x+2}\right]:\frac{x^2+4+x^2-4}{x^2-4}$.

$$E(x) = \left[\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{6}{(x-2)(x+2)}-\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)}\right]\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

$$E(x) = \frac{x+2-6-2x+4}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}.\ E(x)=\frac{-1}{2x}.$$

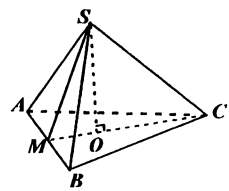
III. 1. a) Aria lotului $= 25 \cdot 8 + \frac{8 \cdot x}{2} = 200 + 4x = 4(x + 50)\ hm^2 = 4(x+50)$ ha.

b) Lungimea gardului $= 25 \cdot 2 + 8 + x + \sqrt{x^2+8^2} = \left(58 + x + \sqrt{x^2+64}\right)$ hm.

c) $\frac{8 \cdot x}{2} = 30$, de unde $x = 7{,}5$ hm. **d)** cu grâu: $25 \cdot 6 = 150$ ha; cu in: $6{,}4 \cdot 2 = 12{,}8$ ha;

cu sfeclă: $(25 - 6{,}4) \cdot 2 = 18{,}6 \cdot 2 = 37{,}2$ ha. A încasat: $150 \cdot 4500 \cdot 1{,}2 = 810000$ lei. **2. a)** Avem $AC' = AB\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ dm, de unde $AB = 6$ dm. Aria bazinului = $\mathcal{A}_{ABCD}$ + Aria laterală a cubului mic + $(\mathcal{A}_{MNPQ} - \mathcal{A}_{A'B'C'D'}) +$ + $\mathcal{A}_{\text{laterală a cubului mare}} + \mathcal{A}_{M'N'P'Q'} = 36 + 4 \cdot 36 + (108 - 36) + 4 \cdot 108 + 108 = 792$ dm^2 = $= 7{,}92$ m^2. S-au cumpărat 9,92 m^2 de tablă care a costat $9{,}92 \cdot 25 = 248$ lei.
b) Fie punctul $T \in O_1O_3$, unde segmentul O_3T reprezintă înălțimea apei din bazin și notăm $O_2T = y$. Avem $216 + (6\sqrt{3})^2 y = 756$, de unde $108y = 540$ și $y = 5$. Distanța de la capacul bazinului la suprafața apei este egală cu $\left(6+6\sqrt{3}\right)-\left(6+5\right)=\left(6\sqrt{3}-5\right)$ dm.

Test 130. I.1. 150. **2.** 40. **3.** 11025. **4.** 18. **5.** $4\sqrt{3}$. **6.** 90. **II. 2.** 3zile. **3.** Fie cele două numere a și b astfel ca $\frac{a}{b} = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$ și $(a + b) : 2 = 102{,}5$. Se obține $a + b = 205$ și $a = \frac{16}{25}b$, de unde $\frac{41}{25}b = 205$ și $b = 5 \cdot 25 = 125$ și $a = 80$. **b)** $m_g = \sqrt{80 \cdot 125} = \sqrt{10000} = 100$. **4.** $-1 + 2 \cdot 2 = 3$ și $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$ sunt propoziții adevărate, deci perechea (1, 2) este soluție a sistemului. **5.** Membrul I al egalității se scrie: $\frac{2}{3-x} - \frac{x-1}{3-x} = \frac{3-x}{3-x} = 1$, deci propoziția este adevărată. **III. 1. a)** Se construiește înălțimea $[CP]$ și cu teorema lui **Pitagora** în ΔBPC se obține $BP = 30$ m; $AP = 60$ m și cum $ADCP$ este dreptunghi, rezultă $CD = 60$ m. $\mathcal{P}_{ABCD} = 240$ m. **b)** $240 : 2 - 1 = 119$. **c)** $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_{CDEF}$. Dar $CDPF$ este trapez, $PF = \frac{CD+AB}{2} = 75$ m, rezultă că $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 =$ $= \frac{(PF+CD)\cdot DP}{2} = \frac{135 \cdot 20}{2}$ m^2 = 1350m^2 = 13,5 *a*. **d)** Dacă $PF \cap MN = \{O\}$, se arată că O este mijlocul segmentului EF și se deduce că $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, de unde folosind punctul **c)**, se obține $\mathcal{A}_1 = 675$ m^2. $\mathcal{A}_3 = \frac{(MB+OF)\cdot AE}{2} = \frac{(45+37{,}5)\cdot 20}{2}$ m^2 = $= 825$m^2. Se poate utiliza regula de 3 simplă. 66000 lei.



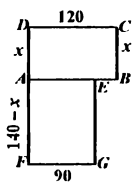
2. a) Din ΔSAB, dreptunghic isoscel cu ipotenuza $AB = 12$ cm se obține lungimea apotemei SM a piramidei $(SABC)$ egală cu 6 cm. Fie $[SO]$ înălțimea piramidei. SO. Se determină cu **teorema lui Pitagora** din ΔSOM. Se obține $SO = 2\sqrt{6}$ cm. **b)** $\mathcal{V}_{SABC} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} = 72\sqrt{2}$ cm^3.

Fie h diferența de nivel a apei din vas. Avem $12^2 \cdot h = 72\sqrt{2}$, de unde rezultă $h = \frac{72\sqrt{2}}{144} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm < 1 cm.

Test 131. I. 1. 0,0006; **2.** 26; **3.** 3. **4.** 2; **5.** 112. **6.** 20. **II.2.** 52,50 lei. **3. a)** Fie x numărul cărților și y numărul albumelor primite de fiecare elev. Atunci numărul cărților acordate ca premii este $25x$ iar numărul albumelor, $25y$. Cum $25x > 25y$ și $25x$ este număr par, se deduce că $x > y$ și x este număr par. Din $25x + 25y = 125$ rezultă $x + y = 5$, de unde se obține, ținând seama de condițiile stabilite mai sus că $x = 4$ și $y = 1$. Deci fiecare elev a primit 4 cărți și un album. **b)** Numărul cărților acordate ca premii a fost $25 \cdot 4 = 100$, iar numărul albumelor, 25. **4.** Cum $2x - 5 \neq 2x + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $2x - 5 = 3x - 2$, de unde se obține $x = -3$.

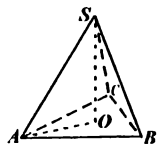
5. $E(x) = \left(\frac{x}{(x-1)(x+1)} + \frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-1}$.

III. 1. a) $\mathcal{P}_{AEFG} = 90 \cdot 2 + (140 - x) \cdot 2 = 460 - 2x$.



b) Se obține ecuația $240 + 2x = 460 - 2x$, de unde se obține $x = 55$;
c) $\mathcal{A}_{ABCD} = 6600 \text{ m}^2 = 66a$. $\mathcal{A}_{AEFG} = 7650 \text{ m}^2 = 76{,}5a$.
d) $(66 + 76{,}5) : 2 - 66 = 5{,}25\ (a)$.

2.a) Din ΔSOA se obține, cu teorema lui **Pitagora**, $OA = 2\sqrt{3}$ dm. Cum $OA = R$ și $AB = R\sqrt{3}$ se obține $AB = 6$ dm. Cu reciproca **teoremei lui Pitagora** în ΔSAC de exemplu, se arată că $m(\sphericalangle ASC) = 90°$.



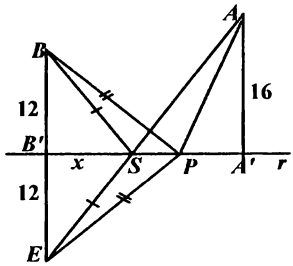
$\mathcal{A}_t = 3 \cdot \mathcal{A}_{SAC} = 3 \cdot \frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 27 \text{ dm}^2$. **b)** Volumul prismei obținute este egal cu volumul piramidei $SABC$. $\mathcal{V}_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABC} \cdot SO = 9\sqrt{2} \text{ dm}^3$. Dacă notăm înălțimea prismei cu h, atunci volumul prismei este egal cu $9h \text{ dm}^3$. Se obține $h = \sqrt{2}$ dm.

Test 132. I. 1. 990; -1 și -73. **3.** -74. **4.** 20. **5.** 8. **6.** 25.

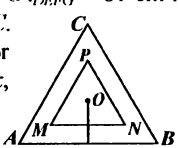
II. 2. o culegere costă 105 lei : 7 = 15 lei; 298 de culegeri costă 298 lei · 15 = 4470 lei.

3. a) 52% din 25 = 13; **b)** Pentru cercul de informatică s-au înscris 60% din 25 = 15 elevi. Numărul elevilor înscriși la ambele cercuri este $(13 + 15) - 25 = 3$. **4.** $A = \{-4; -3; -2; -1; +1; +2; +3; +4\}$, deci numărul elementelor mulțimii A este 8. **5.** Numărul este egal cu $-\frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} + 1 = \frac{131}{108}$, deci inversul lui este $\frac{108}{131}$. **III.1.a)** $AE < AP + PE$ (într-un triunghi lungimea fiecărei laturi este mai mică decât suma lungimilor

celorlalte două laturi); **b)** r este mediatoarea segmentului $[BE]$ şi cum $S,\ P \in r$, rezultă $[ES] \equiv [BS]$ şi $[EP] \equiv [BP]$; **c)** $BS + SA = ES + SA = EA$. $BP + PA = EP + PA$. Cum $EA < EP + PA$, rezultă $BS + SA < BP + PA$; **d)** Costul conductelor va fi minim, dacă lungimea totală a lor va fi minimă, deci staţia trebuie amplasată în punctul S. Se arată că triunghiurile $\Delta SB'E$ şi $\Delta SA'A$ sunt asemenea, (u.a.) de unde rezultă $\frac{B'S}{A'S} = \frac{B'E}{AA'}$ şi dacă notăm $B'S$ cu x, obţinem $\frac{x}{21-x} = \frac{12}{16}$ ceea ce conduce la $x = 9$, adică $B'S = 9$ km. **2. a)** Fie a lungimea muchiei cubului (în cm). Volumul corpului rămas este $a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3} =$ $= 144$ cm^3, de unde rezultă $a = 6$ cm. **b)** Aria suprafeţei vopsite este $5a^2$ + aria laterală a piramidei. Apotema piramidei este $3\sqrt{5}$ cm iar aria laterală este egală cu $36\sqrt{5}$ cm^2. Aria suprafeţei vopsite este $(5 \cdot 6^2 + 36\sqrt{5})$ cm^2 $= 36(5 + \sqrt{5})$ cm^2.



Test 133. I. 1. 5,4. **2.** 7. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** 8. **5.** 27. **6.** 10. **II. 2.** (42 lei : 8) · 11 = 57,75 lei. **3. a)** Distanţa de 12 km parcursă în ziua a doua reprezintă $\frac{2}{5}$ din traseu. Lungimea traseului este 12 km : 2 · 5 = 30 km. **b)** 30 km – 12 km = 18 km. **4.** $x \in \mathbb{Z}$ şi $\frac{3x-5}{x+1} \in \mathbb{Z}$ implică $x + 1 \mid 3x - 5$ şi cum $x + 1 \mid 3x + 3$, rezultă $x + 1 \mid 8$, de unde se obţine $x \in \{-9; -5; -3; -2; 0; 1; 2; 3; 7\}$. **5.** $m = 2$. **III. 1. a)** $\Delta AGF \sim \Delta ABC$ (t.f.a), ceea ce implică $\frac{AM}{AA'} = \frac{GF}{BC}$ şi cum $AA' = BC$, rezultă $AM = GF$. **b)** Notăm lungimea segmentului GD cu x. atunci avem: $MA' = x$, $MA = 18 - x$ şi cum $MA = GF$, rezultă $GF = 18 - x$. $\mathcal{P}_{DEFG} = 2(DG + GF) = 36$ cm. **c)** $\mathcal{P}_{DEFG} = 36$ cm şi $DEFG$ - pătrat implică $DE = EF = GF = GD = 9$ cm. Din $GF \parallel BC$ şi $GF = \frac{BC}{2}$ se deduce că GF este linie mijlocie în ΔABC. **d)** $\mathcal{A}_{ABC} = 162$ cm^2; $\mathcal{A}_{DEFG} = 81$ cm^2. Rezultă că aria pătratului reprezintă 50% din aria triunghiului ABC. **2. a)** Grosimea pereţilor este diferenţa dintre lungimile apotemelor triunghiurilor echilaterale ABC şi MNP. Dacă notăm MN cu x, avem: $\frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = 1$ cm, de unde rezultă $x = 4\sqrt{3}$ cm.



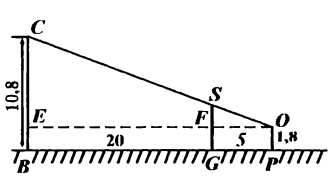
b) Volumul piesei este egal cu diferenţa volumelor celor două prisme. $\mathcal{V} = 180\sqrt{3}$ cm^3.

Test 134. I.1. -9. **2.** $5\sqrt{2}$. **3.** 0,8. **4.** $9\sqrt{3}$. **5.** 8. **6.** $\frac{1}{8}$.

II. 2. $20 + \frac{15}{100} \cdot 20 = 23$ (lei). **3. a)** $2000 \cdot 4{,}10$ lei $= 8200$ lei. **b)** Pentru 1763 lei a primit $1763 : 4{,}30 = 410$ (euro). Dacă nu s-ar fi schimbat cursul valutar, ar fi primit, în schimbul a 1763 lei, suma de $1763 : 4{,}10 = 430$ (euro). Deci a pierdut $430 - 410 = 20$ (euro). **4.** $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3 - 4 = -1 \in \mathbb{Q}$.

5. Fie G_f graficul funcției f, $A(0,2) \in G_f$ implică $f(0)=2$, iar $B(2,0) \in G_f$ implică $f(2) = 0$. Se obține $n = 2$ și $2m + n = 0$, de unde $m = -1$ și $n = 2$.

III. 1. a) Patrulaterul $BCOP$ este trapez dreptunghic cu bazele $BC = 10{,}8$ m, $OP = 1{,}8$ m și înălțimea $BP = 25$ m, iar $SG \parallel BC$. Construim înălțimea OE, $E \in BC$ și notăm $OE \cap SG = \{F\}$. $BEFG$ și $GFOP$ sunt dreptunghiuri, iar triunghiurile ΔOFS și ΔOEC sunt asemenea (t.f.a). Dacă notăm înălțimea gardului (SG) cu x, obținem $\frac{x-1{,}8}{10{,}8-1{,}8} = \frac{5}{25}$, de unde rezultă $x = 3{,}6$, deci înălțimea gardului trebuie să fie de 3,6 m. **b)** Dimensiunile gardului sunt: $20 \text{ m} + 2 \cdot 20 \text{ m} = 60$ m și $15 \text{ m} + 2 \cdot 20 \text{ m} = 55$ m. Lungimea totală a gardului este egală cu perimetrul dreptunghiului $MNRQ = 2 \cdot 60 \text{ m} + 2 \cdot 55 \text{ m} = 230$ m. **c)** $2 \cdot 230 \text{ m} \cdot 3{,}6 \text{ m} = 1656 \text{ m}^2$. **d)** Fie c cantitatea de vopsea ce trebuie achiziționată. Cantitatea de vopsea aplicată pe gard este $1656 : 23 \cdot 2l = 144\ l$ și aceasta reprezintă 96% din c. Se obține $c = 150\ l$. **2. a)** Se determină mai întâi lungimea muchiei cubului, x. $x^3 = 27\ l = 27 \text{ dm}^3 = (3 \text{ dm})^3$, deci lungimea muchiei cubului este egală cu 3 dm.



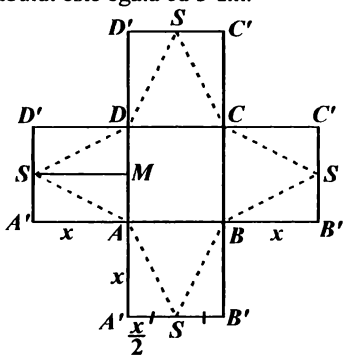


Fig.1

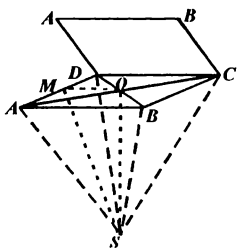


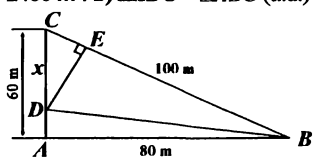
Fig. 2

Aria totală a piramidei este egală cu aria desfăşurării acesteia care este ilustrată în **figura 1**. $\mathcal{A}_t = 5 \cdot \mathcal{A}_{ABCD} - 8 \cdot \mathcal{A}_{SAA'} = 5x^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} x \cdot \frac{x}{2} = 5x^2 - 2x^2 = 3x^2 =$ $= 3 \cdot 9 \text{ dm}^2 = 27 \text{ dm}^2$. **b)** Fie SO înălţimea şi SM o apotemă a piramidei, $M \in AD$. Volumul $\mathcal{V}$ al piramidei este egal cu $\frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABCD} \cdot SO$. Cum $\mathcal{A}_{ABCD} = 9 \text{ dm}^2$, iar $SO < SM = x = 3$ dm, rezultă că $\mathcal{V} < \frac{1}{3} \cdot 9 \text{ dm}^2 \cdot 3 \text{ dm} < 9 \text{ dm}^3 = 9 \, l$, deci în vas nu încap 9 l de apă.

Test 135. I. 1. $4\sqrt{2}$. **2.** 8. **3.** 10. **4.** 90. **5.** $3\sqrt{2}$. **6.** 50. **II. 2.** $2000 + \frac{6}{100} \cdot 2000 = 2120$ (lei).

3. a) Pentru confecţionarea a 5 rafturi sunt necesare: 15 scânduri lungi, 20 de scânduri scurte, 30 de corniere şi 45 de şuruburi, deci răspunsul este afirmativ. **b)** Numărul maxim de rafturi este 6. **4.** $\frac{\sin 60^\circ + \cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 3.$

5. $a^2 = (\sqrt{11} + \sqrt{13})^2 = 11 + 2\sqrt{11} \cdot \sqrt{13} + 13 = 24 + 2\sqrt{143}$. $b^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{19})^2 =$ $= 5 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{19} + 19 = 24 + 2\sqrt{95}$. Cum $\sqrt{143} > \sqrt{95}$, rezultă că $a^2 > b^2$, deci $|a| > |b|$ şi cum a şi b sunt numere pozitive, se obţine $a > b$. **III. 1. a)** Cu **teorema lui Pitagora** se obţine $BC = 100$ m. $\mathcal{P}_{AEC} = 240$ m; $\mathcal{A}_{AEC} = 2400 \text{ m}^2$. **b)** $\Delta EDC \sim \Delta ABC$ (u.u.) Scriind proporţionalitatea laturilor omologe, obţinem: $\frac{x}{100} = \frac{DE}{80} = \frac{EC}{60}$. Din $\frac{x}{100} = \frac{EC}{60}$ se deduce $EC = \frac{3x}{5}$. $BE = 100 - \frac{3x}{5}$.



c) $\mathcal{A}_{ABED} = = \mathcal{A}_{EBD} + \mathcal{A}_{AEB} = \frac{AD \cdot AB}{2} + \frac{DE \cdot BE}{2}$. $AD = 60 - x$, iar din $\frac{x}{100} = \frac{DE}{80}$ se deduce $DE = \frac{4x}{5}$. $\mathcal{A}_{ABED} = \frac{80(60-x)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{5}\left(100 - \frac{3x}{5}\right) = 2400 - \frac{6x^2}{25}$. **d)** Se arată că $\mathcal{A}_{CDE} = \frac{1}{4} \mathcal{A}_{ABC}$, adică $\frac{\mathcal{A}_{CDE}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{1}{4}$. Cum raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare, rezultă că $\frac{x}{BC} = \frac{1}{2}$, deci $x = 50$ m.

2. a) Fundul cutiei este un pătrat cu latura de 44 cm – 2 · 10 cm = 24 cm, iar cutia este o prismă dreaptă cu baza pătrat şi înălţimea de 10 cm.

$\mathcal{V} = 24^2 \cdot 10 = 5760 \text{ (cm}^3\text{)}$.

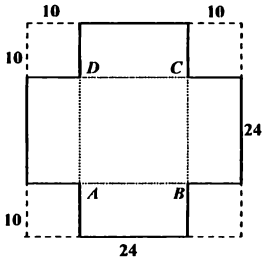


Fig. 1

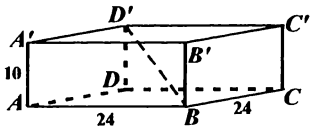


Fig. 2

b) Diagonala prismei are lungimea egală cu $\sqrt{24^2+24^2+10^2}=\sqrt{676}=26$ (cm), deci în cutie nu încape o vergea (rigidă) cu lungimea de 27 cm.

Test 136. I.1. $\sqrt{7}$; **2.** $2x \le 2$. atunci $x \in (-\infty; 1]$; **3.** (2;0). **4.** $r=\frac{10}{2}$ dm = 5 dm;

5. $3\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=27\sqrt{3}$ implică $l^2=36$ deci $l=6$ cm; **6.** $45\%\cdot 800=360$ de elevi.

II. 2. 105. **3. a)** $14\cdot 5-26\cdot 2=18$ (puncte). **b)** Fie x numărul de întrebări la care trebuie răspuns corect pentru a fi admis. Se obține relația $5x-2(40-x)>100$, de unde $x>25\frac{5}{7}$, adică el trebuie să răspundă corect la cel puțin 26 de întrebări.

2. $A, B \in G_f$ conduce la relațiile $f(-1)=1$ și $f(1)=5$, de unde sistemul $\begin{cases}-a+b=1\\a+b=5\end{cases}$ cu soluția $a=2$ și $b=3$. Prin urmare, $f(x)=2x+3$.

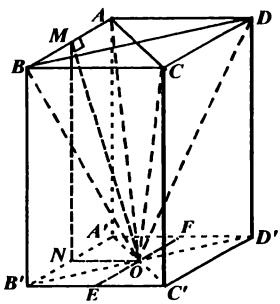
5. Din $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=6^2$ rezultă că $x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=36$ deci $x^2+\frac{1}{x^2}=34$.

III. 1.a) $\mathcal{P}=2\cdot(AN+AF)=2\cdot(58{,}5+40)=2\cdot 98{,}5=197$ m.

b) $\mathcal{S}=1{,}5\cdot AF+1{,}5\cdot AN-1{,}5^2=1{,}5\cdot(40+58{,}5-1{,}5)=1{,}5\cdot 97=145{,}5$ m^2.

c) $\mathcal{A}=AN\cdot AF=58{,}5\cdot 40=2340$ m^2. **d)** $145{,}5\cdot 60$ lei $=8730$ lei.

2.a) Fie $EF \parallel A'B'$, $O \in (EF)$, $E \in B'C'$ și $F \in A'D'$, $MN \perp AB$ și $ON \perp A'B'$, unde $M \in (AB)$, $N \in (A'B')$.



$m(\sphericalangle((OAB);(A'B'C')))=m(\widehat{MON})$.

În triunghiul dreptunghic MNO se obține

$$tg(\sphericalangle MON)=\frac{MN}{ON}=\frac{12}{0{,}5}=24.$$

b) $\mathcal{V}_{DABCD}=\frac{\mathcal{A}_{ABCD}\cdot OO'}{3}=\frac{1\cdot 12}{3}=4\text{m}^3=4000\text{ dm}^3=$

$=4000\ l=40$ hl.

Test 137. I. 1. $x = 5$; **2.** falsă; **3.** $(-\infty; -15]$; **4.** 216 cm^2; **5.** 12 cm. **6.** 37;

II. 2. Dacă notăm cu n un asemenea număr, atunci, conform teoremei împărțirii cu rest avem: $n = 5 \cdot c + r$, $r < 5$, deci $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ şi $n = 5 \cdot 1 + 1 = 6$; $n = 5 \cdot 2 + 2 = 12$, $n = 5 \cdot 3 + 3 = 18$, $n = 5 \cdot 4 + 4 = 24$.

3. a) Media aritmetică este egală cu $424 : 2 = 212$.

b) Fie a şi b cele două numere naturale cu $a > b$. Avem sistemul $\begin{cases} a+b=424 \\ a=3b+8 \end{cases}$, care are soluția $a = 320$ şi $b = 104$.

4. $E(x) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[-\frac{1}{x-3} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{x^2-x+1} + \frac{1}{x-3} \right] \cdot \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{10-x} - 3 \right\}$

$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(-\frac{x+3}{x^2-x+1} + \frac{1}{x-3} \right) \cdot \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{10-x} - 3 \right]$

$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[-\frac{x^2-9}{(x-3)(x^2-x+1)} + \frac{x^2-x+1}{(x-3)(x^2-x+1)} \right] \cdot \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{10-x} - 3 \right\}$

$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-x^2+9+x^2-x+1}{(x-3)(x^2-x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{10-x} - 3 \right]$

$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10-x}{x-3} \cdot \frac{x+1}{10-x} - 3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-3} - 3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1-3x+9}{x-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x+10}{x-3} = \frac{5-x}{x-3}$.

5. Avem: $U(1995 \cdot n) \in \{0,5\}$ de unde $U(1995 \cdot n + 2007) \in \{7; 2\}$, deci numerele de forma $1995 \cdot n + 2007$ nu sunt pătrate perfecte prin urmare $\sqrt{1995 \cdot n + 2007} \notin \mathbb{Q}$.

III. 1. a) $\mathcal{A}_{AENM} = AE \cdot EN = 2000 \cdot 700 = 1400000 \text{ m}^2 = 140\text{ha}$.

b) $\mathcal{A}_{\Delta CEB} = \frac{CE \cdot EB}{2} = \frac{1200 \cdot \overset{500}{\cancel{1000}}}{\cancel{2}} = 600000 \text{ m}^2 = 6000 \text{ ari}$.

c) $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(3000+2000) \cdot 1200}{2} = \frac{5000 \cdot 1200}{2} = 5000 \cdot 600 = 3000000 \text{ m}^2 =$

= 300ha. **d)** $\frac{p}{100}\cdot 300 = 60$, deci $p = \frac{60\cdot 100}{300} = 20\%$. **2. a)** $\mathcal{V} = l^3 = \left(6\sqrt{2}\right)^3 =$

$= 216\cdot 2\sqrt{2} = 432\sqrt{2}$ cm^3 $\mathcal{A}_l = 6\cdot l^2 = 6\cdot\left(6\sqrt{2}\right)^2 = 6\cdot 72 = 432$ cm^2. **b)** Se arată că piramida $B'AD'C$ este un tetraedru regulat cu muchia de 12 cm şi deci $\mathcal{V}_{B'AD'C} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = \frac{12^3\sqrt{2}}{12} = 144\sqrt{2}$ cm^3.

Test 138. I.1. 12; **2.** 5; **3.** $x^3 + 2x^2 - 3x - 2x^2 - 4x + 6 = x^3 - 7x + 6$; **4.** $R = 5$ m, Aria discului $= \pi\cdot 5^2 = 25\pi$ m^2; **5.** muchia este 5 hm, iar d $= 5\sqrt{3}$ hm. **6.** 30.

II. 2. $x = 2\sqrt{5} + 4$; $y = 2\sqrt{5} - 4$; $m_g = \sqrt{x\cdot y} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4^2} = \sqrt{4} = 2$.

3. $x = \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ şi $y = (7\cdot 2\sqrt{2} - 5\cdot 3\sqrt{2})^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) $x + y = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. **b)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \sqrt{2}$. **4.** Din $a^2 = b^2 + 12$ se obţine $a^2 - b^2 = 12$ adică $(a + b)(a - b) = 12$. Din $b = 5 - a$ se obţine $a + b = 5$. Prin urmare $a - b = 12 : 5 = 2{,}4$. **5.** $-2 \le x \le 4$ implică $-4 \le 2x \le 8$, de unde $-5 \le 2x - 1 \le 7$ şi $-\frac{5}{2} \le \frac{2x-1}{2} \le \frac{7}{2}$. Deci $\frac{2x-1}{2} \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

III. 1. a) $\mathcal{A}_{CDEF} = \frac{(CF + DE)\cdot EF}{2} = \frac{(12+8)\cdot x}{2} = 10x$ m^2.

b) Se duce înălţimea din D, în trapezul $CDEF$ şi aplicând teorema lui Pitagora se obţine $CD = \sqrt{16 + x^2}$, de unde $\mathcal{P}_{ABCD} = 4\sqrt{16 + x^2}$. **c)** D este mijlocul $[BE]$, deci $BD = 8$ m. Cum $m\left(\widehat{BCD}\right) = m\left(\widehat{A}\right) = 60°$ şi $BC = CD$ rezultă că triunghiul BCD este echilateral, deci $CD = 8$ m. Adică $\sqrt{16 + x^2} = 8$ de unde $x^2 = 48$ şi $x = 4\sqrt{3}$ m. **d)** $\mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{CDEF} = 2\cdot\mathcal{A}_{BCD} + 10\cdot 4\sqrt{3} = 2\cdot\frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 40\sqrt{3} = 32\sqrt{3} + 40\sqrt{3} =$

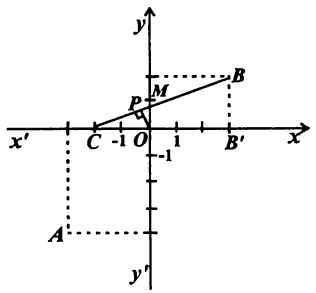
$= 72\sqrt{3}$ m$^2 > 100$ m^2. Nu ajung 100 m^2 de gresie. **2. a)** $S = 6\cdot SP + 3\cdot SD =$

$= 6\cdot 2$ m $+ 3\cdot 3$ m $= 21$ m. **b)** $2\cdot\mathcal{A}_{SPED} + \mathcal{A}_{DER} = 2\cdot 2$ m $\cdot 3$ m $+ \frac{2^2\sqrt{3}}{4}$ m$^2 =$

$= 12$ m$^2 + \sqrt{3}$ m$^2 < 18$ m^2. Deci ajung 18 m^2 de pânză.

Test 139. I. 1. $\frac{575^{(25}}{100}=\frac{23}{4}$; **2.** $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; **3.** $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; **4.** 4 dm + 4 dm + + $4\sqrt{2}$ dm = $4(2+\sqrt{2})$ dm; **5.** $16=\frac{4^2\cdot h}{3}$, de unde $h = 3$ dam; **6.** $(-3; -4)$.

II. 2. $16 + 3 \cdot 16 = 16 + 48 = 64$ fructe. **3. a)** $\frac{4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 4+7\cdot 5+8\cdot 6+9\cdot 3+10\cdot 2}{2+3+4+5+6+3+2} =$ $=\frac{177}{25}=7{,}08$. **b)** Pentru ca media să depășească 7,40, suma notelor trebuie să fie mai mare de $7{,}40\cdot 25 = 185$, deci notele însumate ale celor doi elevi care au luat patru trebuie să depășească $185 - (177 - 8) = 16$. Deci, cei doi ar fi trebuit să obțină note care însumate să dea 17 (7 și 10 sau 8 și 9) sau 18 (8 și 10 sau 9 și 9) sau 19 (9 și 10), ori 20 (situație în care ambii elevi trebuiau să primească nota 10).



4. Fie $BC \cap OY = \{M\}$ și $OP \perp BC$, $P \in BC$; $BB' \perp OX$, $B' \in OX$. (**figura alăturată**). Cu **teorema lui Pitagora** se obține $BC^2 = 5^2 + 2^2 = 29$, de unde $BC = \sqrt{29}$. $\Delta COM \sim \Delta CB'B$ (**t.f.a.**) conduce la $\frac{MC}{BC}=\frac{OM}{BB'}=\frac{OC}{CB'}=\frac{2}{5}$, de unde $MC=\frac{2\sqrt{29}}{5}$ și $OM = \frac{4}{5}$. Cu **teorema a doua a înălțimii** în ΔOMC se obține $OP=\frac{OC\cdot OM}{MC}=2\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2\sqrt{29}}=\frac{6\sqrt{29}}{29}$ unități de lungime. Se poate utiliza direct asemănarea $\Delta COP \sim \Delta CBB'$ (u.u.). **5.** Scăzând 1 din ambii membrii, se obține $x^2 + 26x + 169 \geq 0$, adică $(x + 13)^2 \geq 0$, care e adevărată oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

III.1. a. $\mathcal{A}_{ABEF} + \mathcal{A}_{CDEB}=\frac{(40+60)\cdot x}{2}+\frac{(60-x+60)\cdot 20}{2}=50x+1200-10x=$ $=1200+40x = 40(30 + x)$ m^2.

b. $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DE + FE + AF = 60 + 60 + 20 + 60 - x + 40 + x = 240$ m;

c. $\frac{(40+60)\cdot x}{2}=\frac{(60-x+60)\cdot 20}{2}$, deci $100x = (120 - x) \cdot 20$, adică $5x = 120 - x$, de unde $x = 20$. **d.** Sunt necesari 240 m de gard, care costă $102 \cdot 240 = 24480$ lei > > 22222 lei. Prin urmare nu ajung 22222 lei pentru a cumpăra gardul.

2. a. $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{SPI} \cdot EP = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot 12 = 48\sqrt{3}$ cm^3. **b.** Suprafața vopsită este egală cu

aria totală a cubului din care se scad ariile bazelor prismei și la care se adună aria laterală a prismei triunghiulare. $6 \cdot 12^2 - 2 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot 12 = 6 \cdot 144 -$ $- 8\sqrt{3} + 144 = 1008 - 8\sqrt{3} = 8 \cdot (126 - \sqrt{3}) \simeq 994{,}4 \text{ cm}^2$.

Sunt necesare $(1008 - 8\sqrt{3}) \cdot 0{,}5 \text{ g} = 504 - 4\sqrt{3} < 500 \text{ g}$, deci ajunge.

Test 140. I. 1. $-\frac{6}{5}$; **2.** –999; **3.** $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; **4.** 60°; **5.** $5\sqrt{2}$ cm; **6.** 9%.

II. 2. Dacă notăm cu a și b cele două numere avem: $a = b \cdot 2 + 3$ și $a + b = 108$. Înlocuind pe a în relația a doua obținem: $2 \cdot b + 3 + b = 108$. $3 \cdot b = 105$, de unde $b = 35$, deci $a = 73$. **3. a)** $25 \cdot 2 + 40 \cdot 2{,}5 + 15 \cdot 4{,}4 = 216$ lei;
b) $216 : (25 + 40 + 15) = 2{,}7$ lei. **4.** Avem:

$$E(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-2}{(x-2)^2} + \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)}. \quad E(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{x-3}{x-2}.$$

$$E(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-2}{x-2} = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}. \quad \textbf{5.} \text{ Avem: } U(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2000) = 0, \text{ de unde}$$

$U(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2000 + 8) = 8$, deci $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2000 + 8$ nu este pătrat perfect, rezultă $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2000 + 8} \notin \mathbb{Q}$. **III. 1. a)** Se arată că $\Delta AMQ \equiv \Delta BMN \equiv \Delta PCN \equiv$ $\equiv \Delta PDQ$, de unde rezultă că $[MN] \equiv [NP] \equiv [PQ] \equiv [MQ]$, deci $MNPQ$ este un romb.
b) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC = 20 \cdot 8 = 160 \text{ m}^2$; **c)** Diagonalele rombului $MNPQ$ sunt $MP = BC = 8$ m și $QN = AB = 20$ m. $\mathcal{A}_{MNPQ} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{MP \cdot QN}{2} = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80 \text{ m}^2$.
d) Deducem că jumătate din suprafața salonului se placheză cu un fel de gresie iar cealaltă jumătate cu celălalt fel. Cum pierderile sunt 10%, înseamnă că trebuie să se cumpere cu 10% mai multă gresie de fiecare fel. Pentru romb avem nevoie de $84 + \frac{10}{100} \cdot 84 = 84 + 8{,}4 = 92{,}4 \text{ m}^2$ gresie iar pentru restul salonului tot de $92{,}4 \text{ m}^2$ gresie din celălalt fel. Suma necesară este egală cu: $92{,}4 \cdot 52{,}4 + 92{,}4 \cdot 47{,}6 =$ $= 92{,}4 \cdot (52{,}40 + 47{,}60) = 92{,}4 \cdot 100 = 9240$ lei. **2. a)** Deoarece proiecția dreptei BD' pe planul (ADD') este dreapta AD' rezultă că unghiul format de diagonala BD' cu planul (ADD') este unghiul format de BD' cu AD'. Aplicând **teorema lui Pitagora** în $\Delta ADD'$ cu $m(\sphericalangle ADD') = 90°$ obținem $AD' = 10\sqrt{17}$ cm.

În $\Delta D'AB$, $m(\sphericalangle D'AB) = 90°$, $\operatorname{tg} \widehat{AD'B} = \frac{AB}{AD'} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{10}\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

b) $\frac{3}{4} \cdot {}^{c}V_{ABCDA'B'C'D'} = \frac{3}{4} \cdot \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{3}{4} \cdot 10^2 \cdot 40 = \frac{3}{4} \cdot 100 \cdot 40 = 3000 \text{ cm}^3 = 3 \text{ dm}^3$.
Cum avem echivalența $1 \text{ dm}^3 = 1 \ell$, rezultă că în vază trebuie să turnăm 3 ℓ apă.

Test 141. I. 1. $3\sqrt{5}-3\sqrt{5}=0$; **2.** $\overline{2xy}\in\{225;256;289\}$. **3.** $\frac{12^{(3}}{27}=\frac{4}{9}$. **4.** 90°. **5.** $4\cdot a^2=256$, de unde $a=8$. **6.** 9.

II. 2. 1000 + 12% · 1000 = 1120 lei. **3. a)** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $f(x)=ax+b$; $a, b\in\mathbb{R}$. $A\in G_f$ implică $f(1)=3$, adică $a+b=3$, iar $B\in G_f$, conduce la $f(2)=5$, adică $2a+b=5$. Avem sistemul $\begin{cases}a+b=3\\2a+b=5\end{cases}$, care are soluția $a=2$ și $b=1$, iar funcția căutată este dată de formula $f(x)=2x+1$. **b)** $AB=\sqrt{(2-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$ unități de lungime. $x_1=\frac{1+2}{2}=1{,}5$; $y_1=\frac{3+5}{2}=4$, deci mijlocul segmentului $[AB]$ are coordonatele $M(1{,}5;\ 4)$. **4.** $x^2+3x+2=x^2+2x+x+2=x(x+2)+(x+2)=(x+2)(x+1)$. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}=\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+1}{x-2}$. **5.** $N=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$. Cum $(x-2)^2>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ și $1>0$, conchidem că $N>0$, oricare ar fi x număr real.

III. 1. a) Aplicând **teorema lui Pitagora** în ΔABD, obținem $AB=x\sqrt{2}$, de unde $\mathcal{A}_{ABC}=x^2$: **b)** $\mathcal{A}_{ABD}+\mathcal{A}_{ABC}=\frac{x^2}{2}+x^2=1{,}5x^2$; **c)** $x^2=\frac{x^2}{2}+18$, de unde $x=6$ m; **d)** Aplicând **teorema lui Pitagora** în ΔABC, se obține $BC=12$ m = 1200 cm, 1200 cm : 30 cm + 1 = 41 lalele. **2. a)** Fie punctul M mijlocul muchiei AD a cubului. Aplicând teorema lui **Pitagora** în triunghiurile dreptunghice ODM și ODD' se obține: $OD'=\sqrt{6}$ m și $OM=\sqrt{5}$ m.

$$\mathcal{A}_t=\mathcal{A}_l+\mathcal{A}_b=\frac{\mathcal{P}_b\cdot a_p}{2}+AB^2=\frac{4\cdot 2\cdot\sqrt{5}}{2}+2^2=4\sqrt{5}+4\ \text{m}^2.$$

b) $\mathcal{V}_{OABCD}=\frac{\mathcal{A}_b\cdot h}{3}=\frac{2^2\cdot 2}{3}=\frac{8}{3}\ \text{m}^3=\frac{8000}{3}\ \text{dm}^3=\frac{8000}{3}\ \ell$.

Test 142. I. 1. 31. **2.** –2. **3.** $-\frac{2}{3}$. **4.** 18 cm². **5.** $144\sqrt{3}$ cm². **6.** 38%.

II. 3. a) Din 1500 ℓ lapte se va obține 20% · 1500 ℓ smântână, adică $\frac{20}{100}\cdot 1500=\frac{1}{5}\cdot 1500=300\ell$ smântână. **b)** Cum 500 ml = $\frac{1}{2}$ ℓ, sunt necesare $300:\frac{1}{2}=300\cdot 2=600$ pungi. (sau, cum 300ℓ = 300 · 1000 ml = 300000 ml, vor fi necesare 300000 : 500 = 600 pungi). **4.** Din $A, B\in G_f$ rezultă că $f(-2)=-11$ și $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ se obține sistemul de ecuații $\begin{cases}-2a+b=-11\\a+2b=-2\end{cases}$ cu soluțiile $a=4$ și $b=-3$.

5. Avem: $\frac{y(y-2)+1}{y(y-3)+2}=\frac{y^2-2y+1}{y^2-3y+2}=\frac{(y-1)^2}{y^2-y+2y+2}=\frac{(y-1)^2}{y(y-1)-2(y-1)}=\frac{(y-1)^{\not 2}}{\not(y-1)(y-2)}=\frac{y-1}{y-2}$.

III. 1. a) $\mathcal{A}_{ABEF}=8x$; **b)** $\mathcal{A}_{ABCD}=6(x+12)$; **c)** Avem $6(x+12)=8x$, de unde $x = 36$m; **d)** Pentru $AB = 36$m $\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_{ABEF}=288\ m^2$. Persoana obține $288 \cdot 10 = 2880$ kg roșii și $288 \cdot 7 = 2016$ kg de gogoșari, deci suma încasată va fi $S = 2880 \cdot 1{,}5 + 2016 \cdot 2{,}5 = 9360$ lei. **2. a)** Se află volumul paralelipipedului dreptunghic. $\mathcal{V} = 50 \cdot 40 \cdot 5 = 10000\ m^3$. Știind că într-un m^3 de intră 1000 ℓ apă atunci capacitatea bazinului este $10000 \cdot 1000 = 10.000.000$ ℓ apă.
b) Aflăm aria totală a paralelipipedului din care scădem $\mathcal{A}_{A'B'C'D'}$.
$\mathcal{A}_t=2ab+2ac+2bc=2 \cdot 50 \cdot 40+2 \cdot 50 \cdot 5+2 \cdot 40 \cdot 5=4000+500+400=4900\ m^2$.
Suprafața placată cu gresie va fi $4900 - 50 \cdot 40 = 4900 - 2000 = 2900\ m^2$.

Test 143. I. 1. -4780. **2.** $a=-\frac{3}{4};a=-\frac{18}{24};b=-\frac{20}{24}$ și $c=-\frac{21}{24}$. Deci $c<b<a$; **3.** $\{-1; 0; 1\}$. **4.** 10. **5.** 3. **6.** 23. **II. 2.** $a + a + 1 = 10{,}5 \cdot 2$, de unde $a = 10$. Deci numerele sunt 10 și 11. **3. b)** $f(x) = 2x - 4$. $2x - 4 \geq -3$ și $2x - 4 \leq 2$ conduce la $x \geq \frac{1}{2}$ și $x \leq 3$. Deci $x \in \left[\frac{1}{2};3\right]$. **4.** Dacă $x + y = 11$, atunci $(x + y)^2 = 11^2$, și $x^2 + 2xy + y^2 = 121$. Cum $xy = 24$ rezultă că $x^2 + y^2 = 121 - 2 \cdot 24 = 73$.
5. Asociind convenabil, obținem: $(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=0$, adică $(x+1)^2+(y-2)^2=0$. Cum $(x+1)^2\geq 0$ și $(y-2)^2\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și $y\in\mathbb{R}$, suma acestor pătrate este zero dacă și numai dacă fiecare pătrat este egal cu zero, adică $x + 1 = 0$ și $y - 2 = 0$, sau $x = -1$ și $y = 2$, de unde $2x + y = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$.

III. 1. a) ΔMPC este dreptunghic isoscel, deci $MC = x$, de unde $\mathcal{A}_{MPC}=\frac{MP \cdot MC}{2}=\frac{x^2}{2}$;
b) Aplicând **teorema lui Pitagora** în ΔMPC, se obține $PC = x\sqrt{2}$, deci $AP = x\sqrt{2}$ și $AC = 2x\sqrt{2}$. Cum ΔABC este dreptunghic isoscel, $AB = AC = 2x\sqrt{2}$

$$\mathcal{A}_{ABMP}=\mathcal{A}_{ABC}-\mathcal{A}_{MPC}=\frac{2x\sqrt{2} \cdot 2x\sqrt{2}}{2}-\frac{x^2}{2}=\frac{7x^2}{2}=3{,}5x^2$$

c) $\mathcal{A}_{ABMP} - \mathcal{A}_{MPC} = 12\ m^2$, de unde $x = 2$ m.

d) Un metru pătrat de gresie pentru cămară costă $\frac{80}{100} \cdot 85$ lei $= 68$ lei. Costul total al gresiei este egal cu: $(14 + 0{,}5) \cdot 85 + (2 + 0{,}5) \cdot 68 = 14{,}5 \cdot 85 + 2{,}5 \cdot 68 = 1402{,}50$ lei.

2.a) $\mathcal{V}=\mathcal{A}_{ABC} \cdot BB'=\frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 12=108\sqrt{3}\ (m^3)$. **b)** Se acoperă cu tablă fețele laterale $ACC'A'$ și $BCC'B'$. Suma ariilor laterale este egală cu $2 \cdot 6 \cdot 12 = 144\ (m^2)$. Sunt necesari 144 m^2 de tablă.

Test 144. I. 1. $4x$. **2.** a. **3)** 135 lei. **4.** 25π cm^2. **5.** 6 cm. **6.** 100 ℓ.
II. 2. 160lei; **3. a)** Prețul maxim al unui cadou se obține atunci când articolul cu prețul cel mai mare este prezent în numărul cel mai mare, adică atunci când în cadou sunt 7 banane și o portocală; prețul maxim va fi de 6,20 lei.
b) Urmărind raționamentul anterior, prețul minim se va obține atunci când în pachet sunt 7 portocale și o banană, iar împreună cu jucăria vor costa 10 lei.
4. Din $f(x) = g(x)$ se obține $x = 1$, deci punctul de intersecție va avea coordonatele $(1; a + b)$. **5.** Notăm $x^2 + x + 1 = y$ și avem: $n = y(y + 2) + 1 = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2$, adică $n = (x^2 + x + 1 + 1)^2 = (x^2 + x + 2)^2$, pătrat perfect.

III. 1. a) $\mathcal{A}_{BMNC} = \dfrac{(x+16)\cdot 12}{2} = 6(x+16)$; **b)** $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{BMNC}$ rezultă $6(x + 16) =$ $= 144$, de unde rezultă $x = 8$ cm; **c)** Din $\dfrac{12\cdot y}{2} = 144$ rezultă $y = 24$ cm; **d)** $\mathcal{A}_{AMNE} = 3 \cdot \mathcal{A}_{ABCD} = 432$ pentru că pentru $x = 8$ respectiv $y = 24$. $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{\Delta ADE} = \mathcal{A}_{BMNC}$. **2. a)** $\mathcal{A}_t = 2ab + 2ac + 2bc = 432$ dm^2; **b)** Știm că 1 dm^3 = 1 ℓ, deci aflăm volumul paralelipipedului dreptunghic în dm^3. $\mathcal{V} = 12 \cdot 8 \cdot 6 = 576$ dm^3 < 600 dm^3, deci în acvariu nu încap 600 ℓ apă.

Test 145. I. 1. $6x^6$. **2.** $2\sqrt{3}$. **3.** $\left[-\dfrac{7}{3}; +\infty\right)$. **4.** 12 cm. **5.** 48 cm^3. **6.** 7,12. **II. 2.** 31 și 93.

3. a) Fie a, b, c numerele ce trebuie determinate. Avem $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{8}$.

Cum $a = 24$, se obține $b = 36$ și $c = 48$. **b)** $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{8} = \dfrac{a+b+c}{4+6+8} = \dfrac{216}{18} = 12$.

De unde: $a = 48$; $b = 72$ și $c = 96$.
4. Se verifică ușor că $f(1) = 3$, $f(-2) = 6$ și $f(4) = 0$, deci punctele P, Q și R aparțin graficului funcției f, și prin urmare, sunt coliniare.

5. $E(x) = \left[\dfrac{7}{x+1}\cdot\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{21}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{x+1}{7}\right]\cdot\dfrac{8(x-1)}{4x-3} =$

$= \left[\dfrac{7x}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}\right]\cdot\dfrac{8(x-1)}{4x-3} = \dfrac{7x-3x-3}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{8(x-1)}{4x-3} = \dfrac{8}{x+1}$.

III. 1. a) $\mathcal{A}_{BEFM} = L \cdot l = 16 \cdot x$; **b)** $\mathcal{A}_{\text{terenului}} = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{BEFM} = 12^2 + 16 \cdot x =$ $= 144 + 16x = 16(9 + x)$ dam^2. **c)** $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABEFM}$ implică $16 \cdot x = 144$, deci $x = 9$ dam. **d)** Știind că $\mathcal{A}_{ABCD} = 144$ dam^2 = 1,44 ha, $\mathcal{A}_{BEFM} = 16 \cdot 9 = 144$ dam^2 = $= 1{,}44$ ha, deci în total 2,88 ha, atunci producția totală va fi $2{,}88 \cdot 4{,}5 = 12{,}96$ t.
2. a) Volumul de aer din cort se calculează făcând suma dintre volumul paralelipipedului dreptunghic și volumul piramidei. Deci, $\mathcal{V}_{ABCDMNPQ} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot AM =$ $= 16 \cdot 2 = 32$ m^3, $\mathcal{V}_{SMNPQ} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{MNPQ}\cdot SO = \dfrac{1}{3}\cdot 16\cdot 2\sqrt{3} = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ m^3, de unde

$\mathcal{V}_{aer}=32+\frac{32\sqrt{3}}{3}=32(1+\frac{\sqrt{3}}{3})m^3$. **b)** Se calculează suma dintre aria laterală a paralelipipedului dreptunghic şi aria laterală a piramidei. $\mathcal{A}_{\ell\ paralelipiped}=\mathcal{P}_b\cdot h=$ $=4\cdot 4\cdot 2=32\ m^2$; Apotema piramidei este egală cu 4 m, iar $\mathcal{A}_{\ell\ piramidă}=$ $=\frac{P_b\cdot a_p}{2}=\frac{4\cdot 4\cdot 4}{2}=32\ m^2$. Făcând suma celor două arii laterale obţinem 64 m^2, ceea ce înseamnă că 65 m^2 de pânză ajung pentru confecţionarea cortului.

Test 146. I. 1. 15. **2.** –2. **3.** 10. **4.** 28. **5.** Aria totală tetraedrului regulat de muchie a este $4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$. Din $a^2\sqrt{3}=36\sqrt{3}$ dm² se obţine $a=6$ dm.

6. $(50+2\cdot 80+100+90+125)$ € = 525 €.

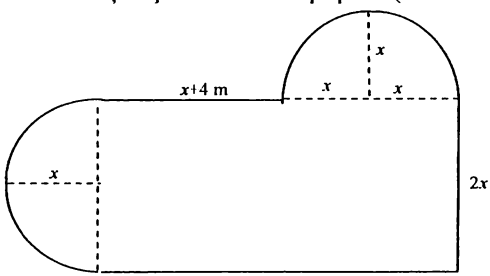
II. 2. Dacă notăm cu x distanţa reală (din teren) dintre cele două localităţi exprimată în centimetri, obţinem :proporţia $\frac{20\ cm}{x}=\frac{1}{500\ 000}$ de unde rezultă $x=20\ cm\cdot 500\ 000=10\ 000\ 000\ cm=100\ km$. **3. a)** Notăm cu x costul televizorului (în lei) fără TVA. Preţul televizorului cu TVA de 19% este $x+19\%\cdot x=119\%\cdot x$. Se obţine ecuaţia $119\%\cdot x=3570$, de unde rezultă $x=3000$, deci, fără TVA, costul televizorului ar fi 3000 lei. **b)** Preţul aceluiaşi televizor , dar cu TVA de 24 % este de $124\%\cdot 3000$ lei = 3720 lei, deci televizorul s-a scumpit cu (3720 – 3570) lei = 150 lei.

Observaţie. TVA s-a mărit cu 24 % – 19% = 5%, deci preţul televizorului s-a majorat cu $5\%\cdot 3000$ lei = 150 lei. **4.** Notăm cu x nota minimă pe care ar trebui s-o primească Eduard pentru a putea obţine media 7. Pentru a obţine media 7 este necesar să fie îndeplinită condiţia: $\{[(7+4+6+7+x):5]\cdot 3+7\}:4\geq 6{,}5$, unde x este număr natural nenul mai mic sau egal cu 10. Pentru rezolvarea inecuaţiei de mai sus se poate utiliza metoda mersului invers, obţinându-se, succesiv: $\{[(24+x):5]\cdot 3+7\}:4\geq 6{,}5$; $[(24+x):5]\cdot 3+7\geq 26$; $[(24+x):5]\cdot 3\geq 19$; $(24+x):5\geq\frac{19}{3}$; $24+x\geq\frac{95}{3}$; $x\geq\frac{23}{3}$; $x\geq 7{,}(6)$. Deoarece x este număr natural, rezultă $x\geq 8$, deci nota minimă pe care ar trebui s-o primească Eduard este 8. **5.** Ridicând la pătrat ambii membri ai egalităţii $a-b=4$, se obţine $a^2+b^2-2ab=16$ şi, cum $a^2+b^2=58$, rezultă $ab=21$.

Soluţie alternativă. Din $a-b=4$ se deduce relaţia $a=b+4$ care împreună cu $a^2+b^2=58$ conduce la $(b+4)^2+b=58$, echivalentă cu $b^2+4b-21=0$. Ultima ecuaţie se poate scrie sub forma $(b+2)^2=25$. Se obţin soluţiile: (1) $b=3$ şi $a=7$ şi (2) $b=-7$ şi $a=-3$. În ambele cazuri produsul numerelor a şi b este egal cu 21.

Comentariu. Comparând cele două soluții, se constată că prima este mult mai rapidă: am determinat produsul numerelor a și b fără a afla numerele. De aceea este bine să citim problemele cu atenție și să nu ne pripim ("să ne grăbim...încet"!).

III. 1. a) Dimensiunile dreptunghiului sunt $3x+4$ m și $2x$, iar diametrele celor două semircercuri sunt egale cu $2x$. Lungimea parapetului este egală cu perimetrul piscinei, adică este $\mathcal{P} = 3x+4\text{m}+x+4\text{m}+2x+2\pi x=$



$=6x+2\pi x+8$ m. **b)** Pentru $\mathcal{P} = (32+8\pi)$m, se obține ecuația $6x+2\pi x+8\text{m}=(32+8\pi)\text{m}$, echivalentă cu $2(3+\pi)x = 8(3+\pi)$m, de unde rezultă $x = 4$ m. **c)** Lungimea parapetului este $\mathcal{L}=8\cdot(4+\pi)$m. Cum $3,14<\pi<3,15$, rezultă $8\cdot 7,14\text{ m} < \mathcal{L} < 8\cdot 7,15\text{m}$, deci $57,12\text{ m} < \mathcal{L} < 57,2\text{m}$. Se constată că pentru 57,2 m de parapet ar fi necesară suma de $57,2\cdot 60$ lei $= 3432$ lei < 3500 lei etc. **d)** Notăm cu $\mathcal{A}$ aria fundului piscinei. Pentru $x=4$ m, se obține $\mathcal{A} = 16\text{m}\cdot 8\text{m}+\pi\cdot(4\text{m})^2=(16\cdot 8)\text{m}^2+\pi\cdot 16\text{ m}^2=$ $=(8+\pi)16\text{ m}^2$ și, cum $3,14<\pi<3,15$, rezultă $11,14\cdot 16\text{ m}^2 < \mathcal{A} < 11,15\cdot 16\text{ m}^2$, deci $178,24\text{ m}^2 < \mathcal{A} < 178,4\text{ m}^2$. Cu 27 de litri de vopsea se poate vopsi, în condițiile de consum precizate, o suprafață de $(27:3)\cdot 20\text{ m}^2 = 180\text{ m}^2$. Prin urmare, pentru vopsirea fundului piscinei este suficientă cantitatea de 27 litri de vopsea

2. a) Volumul prismei $ABCDA'B'C'D'$ este $\mathcal{V}_1 = \mathcal{A}_B\cdot h_1 = AB^2\cdot AA' =$ $=(20\text{ cm})^2\cdot 40\text{ cm} = 16\,000\text{ cm}^3 = 16\text{ dm}^3$. Volumul piesei obținute prin prelucrarea prismei $ABCDA'B'C'D'$ este egal cu volumul prismei $ABCDA_1B_1C_1D_1$, deoarece scobitura și cepul au volumele egale (ambele fiind cuburi cu muchia de 10 cm), deci volumul piesei este egal cu $\mathcal{V}_2=\mathcal{A}_B\cdot h_2=AB^2\cdot AA_1=(20\text{ cm})^2\cdot 30\text{ cm} =$ $=12\,000\text{ cm}^3 = 12\text{ dm}^3$. Cum $12=\frac{3}{4}$ din $16 = 75\%$ din 16, rezultă că volumul piesei reprezintă 75% din volumul prismei $ABCDA'B'C'D'$. **b)** Aria totală a prismei $ABCDA'B'C'D'$ este $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}_B\cdot h_1 + 2\cdot\mathcal{A}_B = (4\cdot AB)\cdot AA' + 2\cdot AB^2 =$ $=(4\cdot 20\text{ cm})\cdot 40\text{ cm}+2\cdot(20\text{ cm})^2 = 3200\text{ cm}^2+800\text{ cm}^2 = 4\,000\text{ cm}^2$. Aria totală a piesei, $\mathcal{A}_2$, este egală cu suma dintre aria totală a prismei $ABCDA_1B_1C_1D_1$ și ariile laterale ale cuburilor $EFGH\,E'F'G'H'$ și $MNPQ\,M'N'P'Q'$ (suprafețele $[EFGH]$ și $[MNPQ]$ care lipsesc din suprafețele bazelor prismei $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sunt „compensate" de fața $E'F'G'H'$ a scobiturii și, respectiv, de fața superioară,

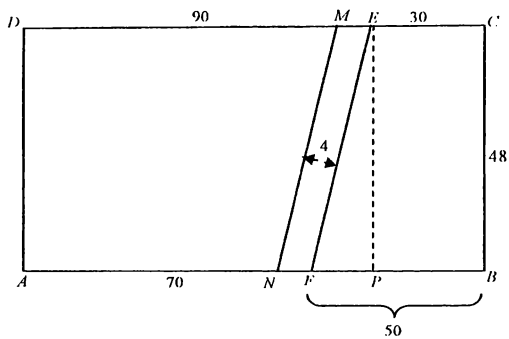
$M'N'P'Q'$ a cepului) .Prin urmare, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}_B \cdot h_2 + 2 \cdot \mathcal{A}_B + 4 \cdot EF^2 + 4 \cdot MN^2 =$
$= (4 \cdot AB) \cdot AA_1 + 2 \cdot AB^2 + 4 \cdot EF^2 + 4 \cdot MN^2 = 4 \cdot (AB \cdot AA_1 + EF^2 + MN^2) + 2 \cdot AB^2 =$
$= 4 \cdot (20\text{ cm} \cdot 30\text{ cm} + 100\text{ cm}^2 + 100\text{ cm}^2) + 2 \cdot (20\text{ cm})^2 = 3200\text{ cm}^2 + 800\text{ cm}^2 = 4\,000\text{ cm}^2$.
Rezultă că ariile totale ale celor două corpuri sunt egale.

Test 147. I. 1. 10,5. **2.** $-\sqrt{72}$. **3.** 1760. **4.** 8. **5.** 20. **6.** 2. **II. 2.** Media geometrică a numerelor x şi 12 este $\sqrt{x \cdot 12}$. Se obţine ecuaţia $\sqrt{x \cdot 12} = 18$. Ridicând ambii membri la pătrat, se obţine $x \cdot 12 = 324$, de unde rezultă $x = 27$. **3. a)** 900 lei – $-$ 16% · 900 lei = 900 lei – 144 lei = 756 lei. **b)** Suma alocată lunar pentru medicamente este $\frac{1}{3}$ din 900 lei = 300 lei. După majorarea preţului, suma necesară pentru medicamente ar fi egală cu 300 lei + 40% · 300 lei = 300 lei + + 120 lei = 420 lei. Pentru celelalte cheltuieli i-ar rămâne suma de 756 lei – 420 lei = =336 lei. **4.** Notăm cu G_f şi G_g graficele funcţiilor f şi, respectiv, g. Fie $M(x,y)$ punctul de intersecţie a reprezentărilor grafice ale celor două funcţii. Din $M(x,y) \in G_f$ rezultă (1) $f(x) = y$, iar din $M(x,y) \in G_g$ rezultă (2) $g(x) = y$. Din (1) şi (2) se obţine ecuaţia $f(x) = g(x)$, adică $2x - 1 = x + 2$, care are soluţia unică $x = 3$. Cum $f(3) = 5$, rezultă că $M(3,5)$.

5. Efectuând calculele, se obţine $a = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - (2x^3 + 2x - 3x^2 - 3) - 2x^2 =$
$= x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$, de unde rezultă $\sqrt{a} = \sqrt{(x^2+2)^2} = |x^2 + 2| = x^2 + 2$.
Deoarece x este număr întreg, rezultă că x^2 este număr natural, ceea ce implică $x^2 + 2 \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\sqrt{a}$ este număr natural, q. e. d.

III. 1. a) $BCEF$ este trapez dreptunghic cu bazele $EC = 30$ şi $FB = 120 - x$ şi înălţimea $BC = 48$, toate lungimile fiind exprimate în metri.

$$\mathcal{A}_{BCEF} = \frac{(FB + EC) \cdot BC}{2} = \frac{(120 - x + 30) \cdot 48}{2} = 24 \cdot (150 - x).$$

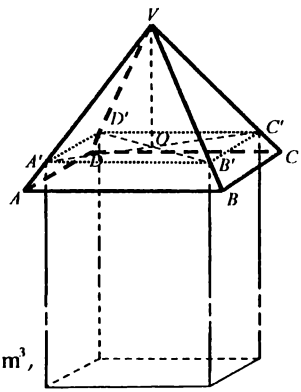


b) $\mathcal{A}_{ADEF} = \dfrac{(FA+ED)\cdot BC}{2} = \dfrac{(x+90)\cdot 48}{2} = 24\cdot(x+90)$. Cum $\mathcal{A}_{ADEF} = 2\cdot\mathcal{A}_{BCEF}$, se obține ecuația $24\cdot(x+90) = 2\cdot 24\cdot(150-x)$ și rezultă $x = 70$.

c) Dacă $x = 70$ m, atunci $AF = 70$ m, $FB = 50$ m. Construim $EP \perp AB$, $P \in AB$. Se arată că $BCEP$ este dreptunghi și rezultă: $EP = 48$ m, $FP = 50$ m $- 30$ m $= 20$ m. Din triunghiul EFP, cu **teorema lui Pitagora**, se obține $EF = 52$ m.

d) $EFNM$ este paralelogram cu latura $EF = 52$ m și înălțimea corespunzătoare acesteia de 4 m (lățimea aleii). Aria aleii este egală cu $52\text{ m}\cdot 4\text{ m} = 208\text{ m}^2$. Amenajarea aleii va costa $208\cdot 33$ lei $= 6864$ lei.

2. a) Spațiul din interiorul podului turnului este interiorul piramidei $VA'B'C'D'$ din figură.



$VA'B'C'D'$ este piramidă regulată deoarece $'A'B'C'D'$ este pătrat cu centrul O, iar VO este înălțimea piramidei. Conform ipotezei,

$$VO = \frac{A'C'}{2} = \frac{A'B'\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\text{ m}.$$

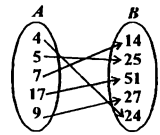
$$\mathcal{V} = \frac{A_{A'B'C'D'}\cdot VO}{3} = \frac{36\cdot 3\sqrt{2}}{3}\text{m}^3 = 36\sqrt{2}\text{m}^3.$$

Cum $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, rezultă că $50{,}76\text{ m}^3 < \mathcal{V} < 51{,}12\text{ m}^3$, deci volumul cerut este de aproximativ 51 m^3.

b) Aria învelitoarei de tablă a acoperișului este aria laterală a piramidei $VABCD$. Din triunghiul dreptunghic VOB' se obține, cu teorema lui Pitagora, $VB' = 6$m, deci muchia laterală a piramidei regulate $VA'B'C'D'$ este congruentă cu muchia bazei, de unde rezultă că fețele laterale ale acestei piramide sunt triunghiuri echilaterale, apoi se deduce, fără dificultate, că și fețele laterale ale piramidei $VABCD$ sunt triunghiuri echilaterale. Cum latura bazei piramidei $VABCD$ are lungimea de 7 m, rezultă că aria laterală a piramidei este egală cu $4\cdot\dfrac{7^2\sqrt{3}}{4}\text{m}^2 = 49\sqrt{3}\text{m}^2$. Aceasta reprezintă $100\% - 2\% = 98\%$ din aria tablei care a fost utilizată. Dacă notăm cu x numărul de metri pătrați de tablă care s-a utilizat, obținem ecuația $98\%\cdot x = 49\sqrt{3}\text{m}^2$, de unde rezultă $x = 50\sqrt{3}\text{m}^2$. Cum $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, deducem că $86{,}5\text{m}^2 < x < 87\text{m}^2$, deci s-au utilizat aproximativ 87m^2 de tablă.

Test 148. I. 1. $3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} : 4 = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ **2.** $x^2 \in \{49; 64; 81; 100\}$. Deci $A = \{-10; -9; -8; -7; 7; 8; 9; 10\}$. **3.** $\dfrac{\text{Cazuri favorabile}}{\text{Cazuri egal-posibile}} = \dfrac{18}{12+18} = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5}$.

4. $B + b = 16 \cdot 2 = 32$ cm, latura neparalelă are $(58 - 32) : 2 = 26 : 2 = 13$ cm. **5.** $18 \text{ cm}^2 \cdot 4 = 72 \text{ cm}^2$. **6.**



II. 2. $7{,}5\ \ell \cdot 9 = 67{,}50\ \ell$. **3.** Notăm cu x numărul copiilor participanți la aniversarea lui Victor.Costul cadoului poate fi exprimat prin $23x + 24$ sau $27x - 24$. Avem ecuația $27x - 24 = 23x + 24$ care are soluția 12. **b)** Cadoul costă $23 \cdot 12 + 24 = 12 \cdot (23 + 2) = 12 \cdot 25 = 300$ lei.

4. Inecuația $\frac{f(x)}{-3} \geq -2$ este echivalentă cu inecuațiile $\frac{4x-3}{-3} \geq -2$ sau $4x - 3 \leq 6$ sau $4x \leq 9$. Mulțimea soluțiilor naturale este $S = \{0; 1; 2\}$.

5. $\sqrt{x^2 - 18x + 81} + \sqrt{x^2 - 24x + 144} = |x - 9| + |x - 12| = (x - 9) + (-x + 12) = 3$ oricare ar fi $x \in [9; 12]$.

III. 1. a) Aria dreptunghiului $MQPN = 24 \cdot 12 = 288 \text{ m}^2$. Aria celor două semidiscuri $= \pi \cdot \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = \pi \cdot 36 = 36 \cdot 3{,}14 \simeq 113{,}04 \text{ m}^2$.

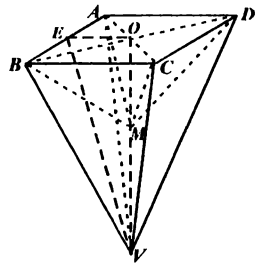
Aria terenului de joc $= 288 \text{ m}^2 + 113{,}04 \text{ m}^2 = 401{,}04 \text{ m}^2$.

b) $AB = MQ + \frac{MN}{2} \cdot 2 = MQ + MN = 24 \text{ m} + 12 \text{ m} = 36 \text{ m}$. $BC = PQ + 2 \cdot 5 \text{ m} =$ $= 12 \text{ m} + 10 \text{ m} = 22 \text{ m}$. Lungimea gardului $= 2 \cdot (36 \text{ m} + 22 \text{ m}) = 58 \text{ m} \cdot 2 = 116 \text{ m}$.

c) $\frac{\text{Aria terenului de joc}}{\text{Aria dreptunghiului } ABCD} = \frac{401{,}04}{36 \cdot 22} = \frac{401{,}04}{792} \simeq \frac{1}{2}$.

d) Gazonul a costat: $100 \text{ lei} \cdot 401{,}04 = 40104$ lei.

2. Fie punctul E mijlocul segmentului $[AB]$. Aria foliei utilizate $= \frac{P_{ABCD} \cdot EV}{2} = 800 \text{ cm}^2$, de unde $EV = \frac{800 \cdot 2}{4 \cdot 20} = 20$ cm. $m(\sphericalangle(VAB),(ABC)) = m(\sphericalangle VEO)$.



Dar $m(\sphericalangle OVE) = 30°$ pentru că $OE = \frac{EV}{2}$ (**teorema unghiului de 30°**). Deci $m(\sphericalangle VEO) = 60°$.

b) $V_{MABCD} = \frac{A_{ABCD} \cdot OM}{3} = \frac{20^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 800\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Dar $800\sqrt{3} < 1400$ pentru că $4\sqrt{3} < 7$ sau $48 < 49$. Prin urmare, în piramida $MABCD$ nu încap 1,4 ℓ de suc.

EDITURA TAIDA VĂ PROPUNE:

COLECȚIA DIDACTICA – EVALUARE NAȚIONALĂ 2011

1. *Artur Bălăucă și colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ. EVALUARE NAȚIONALĂ 2011***. Clasa **a VIII-a**
2. *Laura Buhaciuc* ⇨ ***LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. EVALUARE NAȚIONALĂ 2011***. Clasa **a VIII-a**

COLECȚIA DIDACTICA – MATE BT

1. *A. Bălăucă și colaboratorii* ⇨ ***ARITMETICĂ***. Clasa a **V-a**
2. *A. Bălăucă și colaboratorii* ⇨ ***ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE***, Clasa a **VI-a**
3. *A. Bălăucă și colaboratorii* ⇨ ***ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. GEOMETRIE***, Clasa a **VII-a**
4. *A. Bălăucă și colaboratorii* ⇨ ***ALGEBRĂ. GEOMETRIE***, Clasa a **VIII-a**
5. *A. Bălăucă și colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ. TEME PENTRU ACTIVITĂȚI OPȚIONALE***, Clasele **V-VIII**
6. *F. Anton, C. Anton* ⇨ ***MATEMATICA ... ÎN VIAȚA NOASTRĂ. CULEGERE DE EXERCIȚII ȘI PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU GIMNAZIU, TIP PISA, CU APLICAȚII ÎN VIAȚA NOASTRĂ***

COLECȚIA DIDACTICA – LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ

1. *L. Buhaciuc, I, Constantinescu* ⇨ ***LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ***, Clasa a **V-a**
2. *L. Buhaciuc, L. Poclid* ⇨ ***LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ***. Clasa a **VI-a**
3. *I. Cojocaru și colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ***. Clasa a **VII-a**
4. *L. Buhaciuc și colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ***, Clasa a **VIII-a**

COLECȚIA DIDACTICA – CONCURSURI ȘI OLIMPIADE

1. *A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADE ȘI CONCURSURI***, Clasa a **V-a**
2. *A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADE ȘI CONCURSURI***, Clasa a **VI-a**
3. *A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADE ȘI CONCURSURI***, Clasa a **VII-a**
4. *A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADE ȘI CONCURSURI***, Clasa a **VIII-a**
5. *A. Bălăucă și colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ. OLIMPIADELE NAȚIONALE ALE ROMÂNIEI ȘI REPUBLICII MOLDOVA. BALCANIADA DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI***, Clasele **VI - VIII**
6. *A. Bălăucă* ⇨ ***CONCURSURI BOTOȘĂNENE DE MATEMATICĂ***
7. *J. Grigoraș, I. Nechifor, A. Păduraru* ⇨ ***CONCURSUL DE MATEMATICĂ „FLORICA T. CÂMPAN"***, Clasele **IV-VIII**

COLECȚIA DIDACTICA – ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR

1. *V. Avîrvărei* ⇨ ***DESENUL MEU ABC...***, Clasa **I**
2. *V. Avîrvărei, V. Avăcăriței* ⇨ ***PRIMA MEA CARTE - ABC...***, Clasa **I**
3. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***SĂ SCRIEM CU MARTINEL. CAIET DE SCRIERE***, Clasa **I**
4. *V. Avîrvărei, V. Avăcăriței* ⇨ ***MATEMATICĂ***. Clasa **I**
5. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ***. Clasa **a II-a**
6. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ***. Clasa **a II-a**
7. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ***. Clasa **a III-a**
8. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***MATEMATICĂ***. Clasa **a III-a**
9. *V. Avîrvărei, A. Bălăucă* ⇨ ***MATEMATICĂ***. Clasa **a IV-a**
10. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ***. Clasa **a IV-a**

11. *C. Palade, L. Palade* ⇨ ***MUZICA VOCALĂ,*** Clasele **III-IV**
12. *C. Palade, L. Palade* ⇨ ***CÂNTECUL FULGILOR DE NEA***
13. *M. Ungureanu, L. Vătavu* ⇨ ***GHIOCEI PENTRU MAMA***
14. *C. Palade, L. Palade* ⇨ ***EDUCAȚIE MUZICALĂ. GHID METODIC PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNT PREȘCOLAR ȘI PRIMAR***
15. *R. Lazăr, A. Păduraru, I. Nechifor* ⇨ ***LET 'S HAVE FUN WITH MATH,*** Clasele **I-IV**
16. *J. Grigoraș, I. Nechifor, A. Păduraru, L. Ștefan* ⇨ ***CONCURSUL DE MATEMATICĂ „FLORICA T. CÂMPAN"***, Clasele **I – IV**

COLECȚIA DIDACTICA – CAIETE DE VACANȚĂ

1. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***CAIET DE VACANȚĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ,*** Clasa **I**
2. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***CAIET DE VACANȚĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ,*** Clasa **a II-a**
3. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***CAIET DE VACANȚĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ. ȘTIINȚE ALE NATURII. EDUCAȚIE CIVICĂ,*** Clasa **a III-a**
4. *V. Avîrvărei și colaboratorii* ⇨ ***CAIET DE VACANȚĂ. LIMBA ȘI LITERATURA ROMÂNĂ. MATEMATICĂ. ȘTIINȚE ALE NATURII. GEOGRAFIE. ISTORIE,*** Clasa **a IV-a**

COLECȚIA DIDACTICA

1. *I. Mintici, V. Blândă, L. Cocuți, R. Mihai* ⇨ ***GEOGRAFIE GENERALĂ, AUXILIAR LA MANUALELE ALTERNATIVE,*** Clasa **a V-a**
2. *C. D. Tamaș* ⇨ ***100 PROBLEME DE LOGICĂ,*** Clasele **V-VIII**
3. *M. Chirilă* ⇨ ***VIITORUL ÎNCEPE AZI. GHID DE CONSILIERE ȘI ORIENTARE ȘCOLARĂ PENTRU ELEVI,*** Clasele **V – VIII**
4. *E. M. Vlasie, E. Asăndulesei, I. Nechifor, A. Păduraru* ⇨ ***PORTOFOLIUL DIRIGINTELUI (CLASE GIMNAZIALE)***

COLECȚIA DIDACTICA – ÎNVĂȚĂMÂNT LICEAL

1. *Traian Cohal, Gheorghe Iurea* ⇨ ***PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA A XI-A***
2. *Traian Cohal, Gheorghe Iurea* ⇨ ***PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA A XII-A***
3. *Lăduncă Lucian-Georges* ⇨ ***BORNE PENTRU MATEMATICIENI. ALGEBRĂ-ANALIZĂ,*** Clasele IX-XII
4. *Rotaru Petru* ⇨ ***DETERMINANȚI MICȘTI, CULEGERE DE MATEMATICĂ PENTRU LICEU***
5. *Ioan Băetu* ⇨ ***ALGEBRA FINITĂ PENTRU CENTRELE DE EXCELENȚĂ***

PENTRU OFERTA COMPLETĂ VIZITAȚI
www.edituraTAIDA.ro

Editura TAIDA și ALPHA GROUP doresc să fie o parte activă în cadrul procesului de modernizare a sistemului educațional românesc prin oferta de table interactive și softuri educaționale.
www.mimio.ro

© Editura **TAIDA**
Toate drepturile aparţin Editurii TAIDA. Nicio parte a acestei cărţi nu poate fi retipărită, reprodusă sau utilizată în orice alt fel, inclusiv prin fotocopiere sau în formă electronică, fără avizul prealabil în scris al editurii.

PENTRU COMENZI VĂ RUGĂM SĂ VĂ ADRESAŢI EDITURII TAIDA

- **La adresa: Str. Vasile Lupu, nr. 70-74, Bl. P3, sc. 3, et. 3, ap. 12, Iaşi – 700309**
- **Telefonic: 0232.270250; 0232.270260; 0332.436194**
- **Mobil. 0748.234137; 0765.313632; 0722.824914**
- **Prin fax: 0232-270250; 0232.270260**
- **Prin email: office@edituratаida.ro**
- **Web: www.edituratаida.ro; www.mimio.ro**

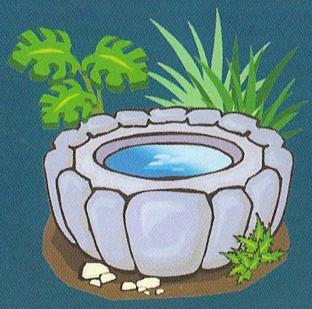
Corectura: *ARTUR BĂLĂUCĂ*
Pre-press: *MIHAELA URSULEANU*
Coperta: *MIHAELA URSULEANU*

www.edituratаida.ro
www.mimio.ro

TIPĂRIT LA:

PRINT multicolor
Str. Bucium nr. 34 Iaşi
tel.: 0232/211225
fax: 0232/211252
office@printmulticolor.ro
www.printmulticolor.ro
SERVICII TIPOGRAFICE COMPLETE

Autorii lucrării apreciază inițiativa Consiliului Național de Evaluare și Examinare prin Evaluarea Națională – 2010 de a face primii pași către evaluarea de tip PISA în direcția formării competențelor specifice studiului matematicii în gimnaziu prin formarea obișnuinței elevilor de a apela la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice. De aceea, autorii s-au străduit prin numeroase probleme propuse să răspundă la întrebarea care se pune tot mai frecvent: „La ce este utilă matematica?"



www.edituraidaida.ro
www.mimio.ro

ISBN 606514066-X
9 786065 140660

Preț: 13 Lei